Ex: Bevisa formeln

$$P(n) \quad \cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)x}{2} = \frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}} \quad n \geq 1$$

(Ind bas) $n=1$: $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Så $P(1)$ är sant

(Ind hyp) Antag $P(k)$ är sant

dvs $\cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{(2k-1)x}{2} = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}$

(Ind påst) då är även P(k+1) sant.

$$\cos\frac{x}{2}+\dots+\cos\frac{(2k+1)x}{2}=\frac{\sin(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

bevis av induktionspåståendet:

$$VL=\cos\frac{x}{2}+\dots+\cos\frac{(2k-1)x}{2}+\cos\frac{(2k+1)x}{2}=$$

$$=\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos\frac{(2k+1)x}{2}=$$

$$=\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x=$$

$$=\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos kx\cos\frac{x}{2}-\sin kx\sin\frac{x}{2}=$$

$$\frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos kx\cos\frac{x}{2} - \sin kx \sin\frac{x}{2}:$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) + \cos kx\cos\frac{x}{2}$$

$$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + \frac{\cos kx\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) + \frac{\cos kx\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\cos x + \frac{\cos kx\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= HL$$

Ex. Visa att heltalen $5\cdot 7^n - 3^n$ för $n=1, \ldots$ alla är delbara med 4. $P(n): 4 \mid 5\cdot 7^n - 3^n$

(Ind bas) $5\cdot 7 - 3 = 35 - 3 = 32$ som är delbart med 4, så $P(1)$ sant.

(Ind hyp) Antag $P(k)$ är sant

(Ind steg) Då är även $P(k+1)$ sant.

(bevis av ind påst)

$P(k+1)$: $5\cdot 7^{k+1} - 3^{k+1}$ är delbart ~~med~~ 4.

$$5\cdot 7^{k+1} - 3^{k+1} = 7\cdot 5\cdot 7^{k} - 3\cdot 3^{k} =$$

$$= \underbrace{7\cdot\left(5\cdot 7^{k} - 3^{k}\right)}_{\substack{\text{är delbart med 4} \\ \text{för } 5\cdot 7^{k}-3^{k} \\ \text{är delbart med 4}}} + 7\cdot 3^{k} - 3\cdot 3^{k} =$$

$$= 7\cdot\left(5\cdot 7^{k} - 3^{k}\right) + (\overset{4}{\overset{\shortparallel}{7-3}})\cdot 3^{k}$$

vilket är delbart med 4 enligt ind hyp

Ex: Visa att n^3+2n är delbart med 3 för alla heltal n.

$P(n): 3 \mid n^3+2n$

I: $n \geq 0$

(Ind bas) $n=0$: $0^3+2\cdot 0=0$ och $3 \mid 0$ så $P(0)$ sant

(Ind hyp) Antar $P(k)$ sant, dvs $3 \mid k^3+2k$

(Ind påst) $P(k+1)$ sant, dvs

$$3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$$

bevis av ind påst:

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 +$$
$$+ 2k + 2 =$$
$$= \underbrace{(k^3 + 2k)}_{\text{delbar med 3 enl ind ant}} + 3k^2 + 3k + 3$$

så $P(k+1)$ sant om $P(k)$ sant.

Enligt induktionsprincipen gäller att $P(n)$ sant för $n \geq ?$.

II $n \leq 0$ $\quad Q(n): \; 3 \mid (-n)^3 + 2(-n)$

(Ind bas) $P(0)$ sant $\quad P(0) : Q(0)$

(Ind hyp) Antag $3 \mid (-k)^3 + 2(-k)$

(Ind påst) då är även

$$\left(-(k+1)\right)^3 + 2\left(-(k+1)\right)$$

delbart med 3.

bevis av induktions påst:

$$(-k-1)^3 + 2(-k-1) = -\left((k+1)^3 + 2(k+1)\right)$$

$$= -\left(k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3\right)$$

$= -k^3 - 2k - 3k^2 - 3k - 3 =$

$= (-k)^3 + 2(-k) - 3k^2 - 3k - 3$

som är delbart med

3 enligt induktionshypotesen

Enligt induktionsprincipen är

$P(n)$ sant för alla $n \leq 0$.

Sätter vi ihop del I och II

får vi alltså att $P(n)$ sant för

alla heltal.

Binomial formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomial formula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Binomialkoefficienter

V: har

$$a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b \Rightarrow \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 b^2$$

$$= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$\Rightarrow \binom{2}{0} = 1,\ \binom{2}{1} = 2,\ \binom{2}{2} = 1$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$\Rightarrow \binom{3}{0} = 1,\ \binom{3}{1} = 3,\ \binom{3}{2} = 3,\ \binom{3}{3} = 1$$

$$(a+b)^n = (b+a)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{3-1} = \binom{3}{2}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right)a^n b + \dots + \left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

Då $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

får vi att

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1$$

$\binom{4}{4} = \binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = \binom{3}{1} + \binom{3}{0} = 3+1 = 4 = \binom{4}{3}$, $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3+3 = 6$

Pascals triangel

$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{k}$	1 1
$\binom{2}{k}$	1 2 1
$\binom{3}{k}$	1 3 3 1
$\binom{4}{k}$	1 4 6 4 1
$\binom{5}{k}$	1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{k}$	1 6 15 20 15 6 1

$$(1+x)^6 = \binom{6}{0}1^6 + \binom{6}{1}1^5x + \binom{6}{2}1^4x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6$$
$$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

$$(a+b)^3 = (b+a)^3$$

$$\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2 b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$\binom{3}{0}b^3 + \binom{3}{1}b^2 a + \binom{3}{2}ba^2 + \binom{3}{3}a^3$$