Differentialekvationer

(icke-linjär) $y'' + y^2 y' = \sin x$

(linjär) $y'' + x^2 y' = 1 + x$ inhomogen

$y'' + x^2 y' = 0$ homogen

konstanta koefficienter $y'' + y' = 0$

$y'' + y' = e^x$

Linjära differential-
ekvationer med konstanta koeff
som är homogena.

Ex: $y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^x$ är en lösning

Insättning ger

$$D^2 e^x + De^x - 2e^x = e^x + e^x - 2e^x = 0$$

En annan lösning är $y = e^{-2x}$:

$$D^2(e^{-2x}) + D(e^{-2x}) - 2e^{-2x} = 4e^{-2x} + (-2e^{-2x}) - 2e^{-2x} = 0$$

$Ae^{x}+Be^{-2x}$ är en lösning oberoende av valet av konstanter A och B. Insättning ger

$$D^2\left(Ae^{x}+Be^{-2x}\right)+D\left(Ae^{x}+Be^{-2x}\right)-2\left(Ae^{x}+Be^{-2x}\right)$$

$$=D^2\left(Ae^{x}\right)+D^2\left(Be^{-2x}\right)+D\left(Ae^{x}\right)+D\left(Be^{-2x}\right)-$$

$$-2Ae^{x}-2Be^{-2x}=A\left(D^2e^{x}+De^{x}-2e^{x}\right)+$$

$$+B\left(D^2e^{-2x}+De^{-2x}-2e^{-2x}\right)=A\cdot 0+B\cdot 0=0$$

<u>Sats</u>: Om $y_1, \ldots, y_n$ är lösningar till en linjär homogen diff ekv med konstanta koefficienter, så är även

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

en lösning.

(Superpositionsprincipen)

Linjärt oberoende lösningar:

Om $y_1, \dots, y_n$ är en uppsättning lösningar säger vi att de är linjärt oberoende om

$$C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0$$

$$\Rightarrow C_1, \dots, C_n = 0. \ (\text{alla } C_i = 0)$$

T.ex e^x och $2e^x$ ej linjärt oberoende för $(-2) \cdot e^x + 2e^x = 0$ $\quad C_1 = -2, \ C_2 = 1$

<u>Sats</u>: Om $y_1, \dots, y_n$ är en uppsättning linjärt oberoende lösningar till

a_i konstanter $$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (*)$$

så är den allmänna lösningen

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

Anm: speciellt har ekvationen (*) precis n st linjärt oberoende lösningar.

Ex $\quad y'' + y' - 2y = 0$

Lösningarna e^{x} och e^{-2x} är linjärt oberoende (övn) så allmänna lösningen blir

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x}.$$

Observera att $r^2 + r - 2 = 0$ har lösningarna $r = 1$, $r = -2$.

$$D^2(e^{rx}) + D(e^{rx}) - 2e^{rx} =$$

$$= r^2 e^{rx} + r e^{rx} - 2e^{rx} = e^{rx}(r^2 + r - 2)$$

Ex (komplexa rötter)

$$y'' + y = 0$$ ger

karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$\Rightarrow$ e^{ix} och e^{-ix} är lösningar.

Vi vill dock ha reella funktioner.

Allmänna lösningen

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1(\cos x + i \sin x) +$$

$$+ C_2(\cos x - i \sin x) = (\overset{A}{C_1 + C_2}) \cos x + \overbrace{i(C_1 - C_2)}^{B} \sin x =$$

$$= A\cos x + B\sin x.$$

Ex: $y'' - 2y' + 5y = 0$

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm 2i$$

Allmänna lösningen blir

$$y = C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} = e^x\left(C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}\right)$$

$$= e^x\left(C_1(\cos 2x + i\sin 2x) + C_2(\cos 2x - i\sin 2x)\right) =$$

$$= e^x\left(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos 2x + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B}\sin 2y\right) =$$

$$= Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x.$$

Ex (multipla rötter)

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

dubbel rot

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ bara när $c_1 = c_2 = 0$

Vi får alltså bara lösningen e^x men vi vet att det finns en linjärt oberoende lösning. xe^x är en lösning

$$D^2(xe^x) - 2D(xe^x) + xe^x =$$

$$D^2(xe^x) - 2D(xe^x) + xe^x =$$

$$= 2\,Dx\,De^x + x\,D^2e^x - 2(Dx)e^x - 2x\,De^x + xe^x = \cancel{2e^x} + xe^x - \cancel{2e^x} - 2xe^x + xe^x =$$

$$= 0$$

$$\left(2\,Dx\,De^x - 2\,Dx\,e^x\right) + x\left(\underbrace{D^2e^x - 2De^x + e^x}_{=0}\right)$$

Allmänna lösningen

$$y = Ae^x + Bxe^x.$$

Visa att e^x och e^{-2x} är linjärt oberoende.

e^x
e^{-2x}
$e^x + e^{-2x}$
linjärt beroende

Antag $C_1 e^x + C_2 e^{-2x} = 0$

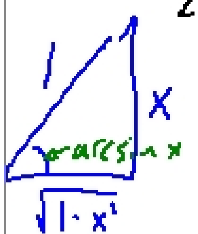
det vi ska visa är att C_1 och C_2 är noll.

$$C_1 e^x + C_2 e^{-2x} = 0 \Rightarrow C_1 e^{3x} + C_2 = 0$$

e^{2x}.

$$\Rightarrow \left(\text{om } C_1 \neq 0\right) \Rightarrow e^{3x} = -\frac{C_2}{C_1}$$ men e^{3x} ej konstant. $\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

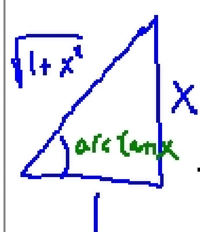
230 Vilket är störst



$$\arctan\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3} \quad \text{eller} \quad \arccos\frac{1}{4}\,?$$

$$< \frac{\pi}{4} \qquad < \frac{\pi}{4} \qquad\qquad < \frac{\pi}{2}$$

Bägge uttrycken ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$.



$$\sin\left(\arctan\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

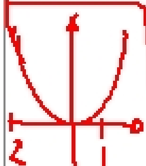
Sinusfunktionen är strängt växande på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ så vi kan jämföra talen

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}(\sqrt{2}+1) \quad \text{och} \quad \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{istället}$$

för de ursprungliga uttrycken. Talen är positiva så det räcker att jämföra kvadraterna

$$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \qquad \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}(\sqrt{2}+1)\right)^2 = \frac{4\overbrace{(2+2\sqrt{2}+1)}^{<7}}{9\cdot 5} < \frac{28}{45} < \frac{15}{16}$$

dvs $\arccos\frac{1}{4} > \arctan\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3}$



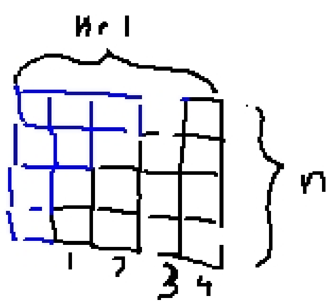
$(-2)^2 = 4 > 1$

men

$-2 < 1$

304 e: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=$

$$\left(1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right)$$



$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}-2n}{2(n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\cancel{n}}{\cancel{n}2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}.$$