806b) Låt $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$

Beräkna $f^{(n)}(0)$, n heltal ≥ 1.

MacLaurin utveckling av f

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + O(t^{n+1})$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3!a^3} + \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!a^n} + O(x^{n+1})$$

$$x^2 e^{-\frac{x}{a}} = x^2 - \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{2a^2} - \frac{x^5}{3!a^3} + \dots + (-1)^n\frac{x^{n+2}}{n!a^n} + O(x^{n+3})$$

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{2a^2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!\,a^n} + O(x^{n+3})$$

Koefficienten framför x^n är $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Den kan vi avläsa

är $\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!\,a^{n-2}}$ så $f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{(n-2)!\,a^{n-2}}$

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Om λ är dubbelrot till den karakteristiska ekvationen så är λ även rot till den deriverade ekvationen

$$n r^{n-1} + a_{n-1}(n-1) r^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r-\lambda)^2 q(r) = 2(r-\lambda) q(r) + (r-\lambda)^2 q'(r)$$

Ansätt $y = x e^{\lambda x}$

$$D^n(xe^{\lambda x}) + a_{n-1} D^{n-1}(xe^{\lambda x}) + \dots + a_0 x e^{\lambda x} =$$

$$= \left(\binom{n}{0} x D^n e^{\lambda x} + \binom{n}{1} Dx\, D^{n-1} e^{\lambda x} \right) +$$

ursprungliga ekvationen

$$+ a_{n-1} \left(\binom{n-1}{0} x D^{n-1} e^{\lambda x} + \binom{n-1}{1} Dx\, D^{n-2} e^{\lambda x} \right) + \dots$$

$$\dots + a_0 \binom{0}{0} x e^{\lambda x} = x \left(D^n e^{\lambda x} + a_{n-1} D^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_0 e^{\lambda x} \right)$$

$$+ \left(\underbrace{\binom{n}{1}}_{= n} D^{n-1} e^{\lambda x} + a_{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{1}}_{= n-1} D^{n-2} e^{\lambda x} + \dots + a_1 e^{\lambda x} \right)$$

den deriverade.

1
1 1
1 2
1 3

Inhomogena ekvationer

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x)$$

$$(**) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

Antag y_1 och y_2 lösningar till $(*)$ då är $y_1 - y_2$ en lösning till $(**)$.

$$D^n(y_1 - y_2) + a_{n-1} D^{n-1}(y_1 - y_2) + \dots + a_0(y_1 - y_2) =$$
$$= D^n y_1 - D^n y_2 + a_{n-1}(D^{n-1} y_1 - D^{n-1} y_2) + \dots + a_0 y_1 - a_0 y_2 =$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

Så allmänna lösningen
till (*) kan skrivas

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är en lösning till (*)
en så kallad partikulär lösning.
och y_h är allmänna lösningen till
(**).

Ex: $y'' - y = x$

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$\Rightarrow e^x$ och e^{-x} är $\underbrace{\text{lösningar}}_{}$ linjärt oberoende

till homogena ekvationen så allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir $y_h = Ae^x + Be^{-x}$.

Vi gissar $y_p = -x$ Test: $y_p'' - y_p = 0 + x = x$. OK

Allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen blir

$$y = -x + Ae^x + Be^{-x}$$

Ex $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2x - 1 \quad (*)$

Ansätt $y_p = ax^2 + bx + c$

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 2a - 2(2ax + b) -$$
$$- 3(ax^2 + bx + c) = -3ax^2 - (4a + 3b)x$$
$$+ (2a - 2b - 3c)$$

Vi jämför detta med högerledet i $(*)$

$$\begin{cases} -3a = 1 & \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ -4a - 3b = 2 & \Rightarrow -3b = 2 + 4a \Rightarrow b = \frac{2 + 4a}{-3} = -\frac{2}{9} \\ 2a - 2b - 3c = -1 & \Rightarrow c = \frac{-1 - 2a + 2b}{-3} = \frac{7}{27} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad (**)$$

Karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Allmänna lösningen till (**) blir alltså

$$y_h = Ae^{3x} + Be^{-x}$$

Allmänna lösningen till (*) blir så

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27} + Ae^{3x} + Be^{-x}$$

Ex: $y'' + y' - 2y = \sin 2x$

Ansätt $y_p = A \sin 2x + \underline{B \cos 2x}$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x +$$

$$+ 2A \cos 2x - 2B \sin 2x - 2A \sin 2x - 2B \cos 2x =$$

$$= (-4A - 2B - 2A) \sin 2x + (-4B + 2A - 2B) \cos 2x =$$

$$= (-6A - 2B) \sin 2x + (-6B + 2A) \cos 2x$$

Jämför med högerledet

$$\begin{cases} -6A - 2B = 1 \\ 2A - 6B = 0 \Rightarrow A = 3B \end{cases} \to B = -\frac{1}{20}, \quad A = -\frac{3}{20}$$

Ex: $y'' + 2y' + y = e^{4x}$

Ansätt: $y_p = Ae^{4x}$

$y_p'' + 2y_p' + y_p = 16Ae^{4x} + 2\cdot 4Ae^{4x} + Ae^{4x} =$

$= (16A + 8A + A)e^{4x} = 25Ae^{4x}$

Jämför med högerledet

$25A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{25}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{25}e^{4x}$

Ex: $y'' - y = x + \sin x \quad (*)$

I $\quad y'' - y = x$

II $\quad y'' - y = \sin x$

Om y_1 är en lösning till I och y_2 en lösning till II blir $y_1 + y_2$ en lösning till (*)

Vi såg att som y_1 kan vi ta $-x$.

För att hitta en partikulärlösning till II ansätter vi $y_2 = A \sin x$

$$y'' - y = \sin x$$

Ansätt $y_2 = A\sin x$

$y'' - y = x + \sin x$

$y_1'' - y_1 = x$

$y_2'' - y_2 = \sin x$

$$y_2'' - y_2 = -A\sin x - A\sin x$$

$$= -2A\sin x$$

$$\Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}\sin x$$

$$y_h = Ae^x + Be^{-x} \qquad r^2 - 1 = 0$$

$$r = \pm 1$$

$$y = y_1 + y_2 + y_h = -x - \frac{1}{2}\sin x + Ae^x + Be^{-x}$$