Förskjutningsregeln

Ex: $y'' + y' - 2y = e^x$

Karakteristiska ekvationen

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$y_h = Ae^x + Be^{-2x}$$

Om vi sätter $y_p = Ae^x$ får vi

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = 0$$

Vi ansätter istället $y_p = z(x)e^x$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = D^2\left(z(x)e^x\right) + D\left(z(x)e^x\right) - 2ze^x$$

$$= z''(x)e^x + 2z'(x)e^x + \cancel{z(x)e^x} + z'(x)e^x + \cancel{z(x)e^x} - \cancel{2z(x)e^x} =$$

$$= z''(x)e^x + 3z'(x)e^x = e^x\left(z''(x) + 3z'(x)\right)$$

Vi jämför med höger ledet

$$z''(x) + 3z'(x) = 1$$

Ansätt $z(x) = ax \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{x}{3}e^x.$$

$$z''(x) + 3z'(x)$$

$$r^2 + 3r = (r^2 + 2r + 1) + (r + 1) - 2$$

$$= (r+1)^2 + (r+1) - 2$$

$$y'' + y' - 2y$$

$$r^2 + r - 2$$

<u>Sats</u> (Förskjutningsregeln)

Ansättningen $y_1(x) = z(x) e^{\lambda x}$

i uttrycket

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y$$

ger

$$e^{\lambda x}\left(z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_0 z\right)$$

$$L(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_0$$

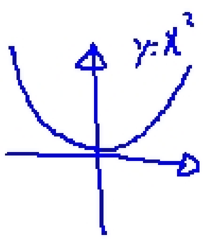
$$L^*(r) = r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \ldots + b_0$$

då gäller $L^*(r) = L(r+\lambda)$

Ex: $y''+y=\sin x=\operatorname{Im} e^{ix}$

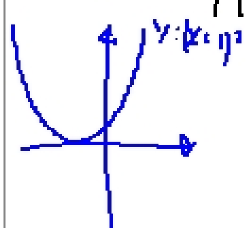
$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$D^2(A\sin x+B\cos x)+A\sin x+B\cos x=0$



Vi tittar först på ekvationen

$$y''+y=e^{ix}$$



Ansätt $y_p(x)=z(x)e^{ix}$

$$D^2y_p(x)+y_p(x)=z''(x)e^{ix}+2z'(x)ie^{ix}+(-1)ze^{ix}$$
$$+ze^{ix}=e^{ix}\left(z''(x)+2iz'(x)\right)$$

$L(r)=r^2+1$ $\quad L(r+i)=(r+i)^2+1=r^2+2ir-1+1$
$$=r^2+2ir=L^*(r)$$

$$z''(x) + 2i\,z'(x) = 1$$

Ta $z(x) = ax$

$$2ia = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{ix}{2} e^{ix}$ en lösning till $y'' + y = e^{ix}$.

För att få en partikullösning till $y'' + y = \sin x$ måste vi ta imaginärdelen av y_p

$$y_u = \operatorname{Im} y_p = \operatorname{Im} -\frac{ix}{2} e^{ix} = -\frac{x}{2}\cos x$$

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{ix}{2} e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{ix}{2}\left(\cos x + i\sin x\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-ix\cos x}{2} + \frac{x}{2}\sin x\right)$$

Ex: $y'' - y = x\sin x = x\,\mathrm{Im}\, e^{ix}$

Vi betraktar först ekvationen

$$u'' - u = xe^{ix}$$

Ansätt $u_p(x) = z(x)e^{ix}$.

Förskjutningsregeln säger att

$$L^*(r) = L(r+i) = (r+i)^2 - 1 =$$

$= r^2 + 2ir - 2$ så ansättningen ger ekvationen

$$e^{ix}\left(z''(x) + 2iz'(x) - 2z(x)\right) = xe^{ix}$$

$$z''(x) + 2i\,z'(x) - 2z(x) = x$$

$$z(x) = ax + b$$

$$z''(x) + 2i\,z'(x) - 2z(x) =$$

$$= 2ia - 2ax - 2b = -2ax + (2ia - 2b)$$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2ia - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = ia = -\frac{i}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = -\frac{x}{2} - \frac{i}{2} \quad \Rightarrow u_p(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{i}{2}\right)e^{ix}$$

En partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen fås genom att ta $y_p(x) = \operatorname{Im} u_p(x)$.

$$y_p(x) = \operatorname{Im}\left(-\frac{x}{2} - \frac{i}{2}\right)e^{ix}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{x}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\cos x + i\sin x\right)\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + i\left(-\frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)\right)$$

$$= -\frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \qquad r^2 - 1 = 0 \quad r = \pm 1$$

Allmänna lösningen till $y'' - y = x\sin x$

$$y_h = Ae^{x} + Be^{-x} \qquad y_p = -\frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} + \left(-\frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$D^2y + Dy + 3y = (D^2 + D + 3)y$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = D^2y + 2Dy + y$$

$$(D+1)(D+1)y = (D+1)(Dy + y) =$$

$$= D^2y + Dy + Dy + y = D^2y + 2Dy + y$$

$$(D+1)(D+2) = D^2 + 3D + 2$$

Bevis av förskjutningsregeln:

$$(D-\alpha)\left(z(x)e^{\lambda x}\right) =$$

$$D\left(z(x)e^{\lambda x}\right) - \alpha\, z(x)e^{\lambda x} =$$

$$= z'(x)\,e^{\lambda x} + \lambda\, z(x)e^{\lambda x} - \alpha\, z(x)e^{\lambda x} =$$

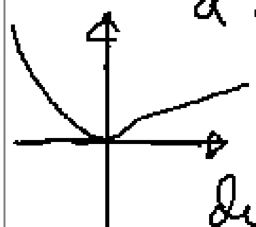
$$= e^{\lambda x}\left(z'(x) + \lambda z(x) - \alpha z(x)\right) =$$

$$= e^{\lambda x}\left(D - \alpha + \lambda\right) z(x)$$

$L(r) = r - \alpha \qquad L^*(r) = r - \alpha + \lambda = (r+\lambda) - \alpha$

så satsen följer av faktoruppdelning

405: För vilka värden på a och b är funktionen



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \leq 1 \\ ax+b & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

deriverbar i punkten $x=1$?

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{a\Delta x + a + b - 1}{\Delta x} = a \text{ om } \overbrace{a+b-1=0}^{\text{följer från kont}}$$

$1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1 = 2\Delta x+(\Delta x)^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2$$

$$\Longrightarrow a = 2,\quad 2+b-1 = 0 \Rightarrow b = -1$$