Gul

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2-x^2}{x^3} = \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ 1\\ 2\end{array}\right. \quad ?$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$(e^x-1)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right)^2 = x^2 + 2x\frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$(e^x-1)^2 - x^2 = x^3 + O(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+O(x^4)}{x^3} = 1$$

2. I vilken punkt har funktionen x^3+3x^2+3x-4 ett lokalt minimum?

a) $x=-3$

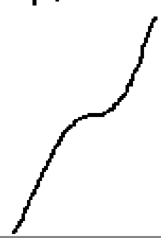
b) $x=\frac{1}{3}$

c) lokalt min saknas.

$$D(x^3+3x^2+3x-4)=3x^2+6x+3$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1=0$$

$$\begin{array}{lccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & -1 & \nearrow & \nearrow & \\ f'(x) & + & + & + & 0 & + & + & + \end{array}$$



Grön

1. Vad blir $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right.$?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 = x^2 - 2\frac{x x^3}{3!} + O(x^5)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + O(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

2. I vilken punkt har funktionen x^3+5x^2+3x+1 ett lokalt min?

a) $x=-\frac{1}{3}$, b) $x=-3$, c) lokalt min saknas

$$D(x^3+5x^2+3x+1)=3x^2+10x+3$$

$$x^2+\frac{10}{3}x+1=0$$

$$x=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25-9}{9}}=-\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}=\begin{cases}-\frac{1}{3}\\-3\end{cases}$$

$$3(x+3)(x+\tfrac{1}{3}) = f'(x)$$

-3, $-\frac{1}{3}$

$f'(x)$: $+++0---0+++$

Rosa

1. Vad blir $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$?

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$$

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)^2 = 1 - 2\frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + O(x^4)}{x^2} = 1$$

2. I vilken punkt har funktionen x^3-4x^2-3x+2 ett lokalt minimum?

a) $x=-\frac{1}{3}$, b) $x=3$, c) lokalt min saknas

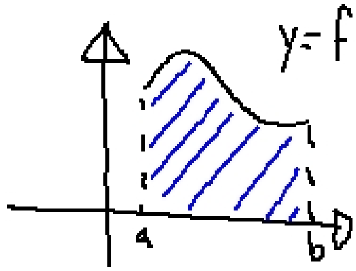
$$D\left(x^3-4x^2-3x+2\right)=3x^2-8x-3$$

$$x^2-\frac{8}{3}x-1=0$$

$$x=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16+9}{9}}=\frac{4}{3}\pm\frac{5}{3}=\begin{cases}3\\-\frac{1}{3}\end{cases}$$

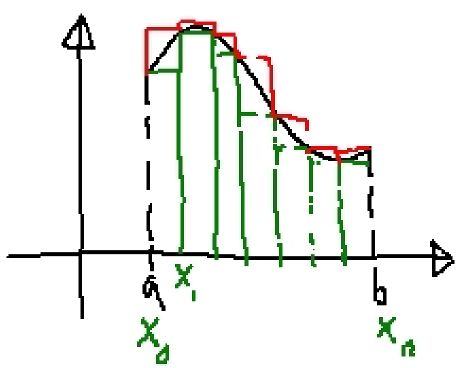
$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \nearrow\nearrow\nearrow \quad -\tfrac{1}{3} \quad \searrow\searrow\searrow \quad 3 \quad \nearrow\nearrow\nearrow \\
f'(x)=(x-3)(x+\tfrac{1}{3}) \quad +++ \quad 0 \quad --- \quad 0 \quad +++
\end{array}$$

Integraler



$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

"arean av det blå-markerade området".



undersumma

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\min_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)\, \Delta x_i \le \text{Arean}$$

översumma

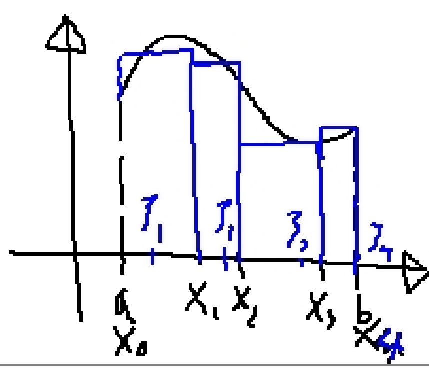
$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\max_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)\, \Delta x_i \ge \text{Arean}$$

När intervallängderna krymper går bägge summorna mot Arean. Vi kan lika gärna ta någon annan punkt på intervallen:

$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$

Riemannsumma: $S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

ξ_k ligger i $[x_{k-1}, x_k]$



$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

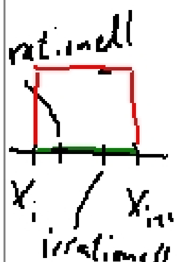
max Δx_i kallas diametern

Def: Om funktionen f, definierad på intervallet $[a,b]$, är sådan att varje följd av Riemannsummor S_i för vilka diametern går mot noll när $i \to \infty$, gäller att följden S_i konvergerar, så sägs f vara integrerbar.

$$\lim_{i \to \infty} S_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integralen av f på intervallet $[a,b]$.

Ex: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rationell} \\ 1 & x \text{ irrationell} \end{cases}$



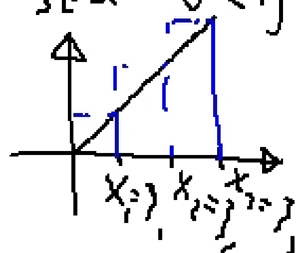
Varje intervall innehåller både rationella och irrationella punkter. Det ger att alla undersummor blir 0 men alla översummor blir $b-a$ $\Rightarrow$ funktionen är ej integrerbar.

Sats: Varje styckvis kontinuerlig och begränsad funktion är integrerbar.

(motivation: över och undersummorna konvergerar mot samma värde)

Ex $f(x) = x$ är integrerbar på intervallet $[0,3]$. Vi delar intervallet i n lika stora delar $x_i = \frac{3i}{n}$ och sen väljer vi

$\xi_k = x_k$.



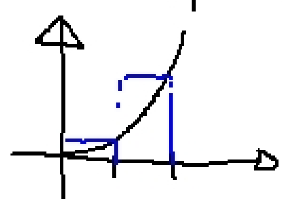
$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta x_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{n}\cdot\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{9}{2}.$$

Ex 7.5: $f(x) = x^2$ på intervallet $[0,1]$:

Vi delar in intervallet i n lika stora delar. $x_i = \frac{i}{n}$ och väljer $\xi_k = x_k$



$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\frac{1}{n^3} = \left(\begin{array}{c}\text{Uppgift}\\ \text{K8.2 i}\\ \text{boken}\end{array}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Sats (Integralkalkylens huvudsats):

Om $F'(x)$ är integrerbar

så är $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$

(En funktion F vars derivata blir $F'(x)$ kallas primitiv funktion till $F'(x)$)

Ex: $x = D\left(\frac{x^2}{2}\right) = D\left(\frac{x^2}{2} + 5\right)$

så $\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2} - \frac{0}{2} = \frac{9}{2}$

$\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 5\right]_0^3 = \frac{9}{2} + 5 - \frac{0}{2} - 5 = \frac{9}{2}$

Ex: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

Ex: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$

$= 1 + 1 = 2$

Bevis: Eftersom F antas vara deriverbar i det slutna intervallet $[a,b]$ så är den också kontinuerlig där. Så om vi har delat in intervallet som $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ får vi:

$F(b) - F(a) = \left(F(b) - F(x_{n-1})\right) + \left(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\right) + \dots + \left(F(x_1) - F(a)\right) =$

$= $ (enl medelvärdessatsen) $=$

$$= F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) + \ldots + F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\,\Delta x_k .$$ där ξ_i ligger i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.