Ex: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_0^{\pi} \frac{(-\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx =$

$\left(f(x) = \frac{1}{1+x^2} \right)$ $\displaystyle = -\int_0^{\pi} \overbrace{f(\cos x)\, D\cos x}^{\frac{1}{1+\cos^2 x}(-\sin x)\,dx}\,dx =$ $\left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right.$ $\quad dt = \frac{dt}{dx}\,dx$

$\left(\begin{array}{l} \cos 0 = 1 \\ \cos \pi = -1 \end{array}\right)$ $\displaystyle = -\int_1^{-1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt =$

$\displaystyle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Medelvärden

Def: Medelvärdet för funktionen f i intervallet $[a,b]$ är

$$M(f) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx$$

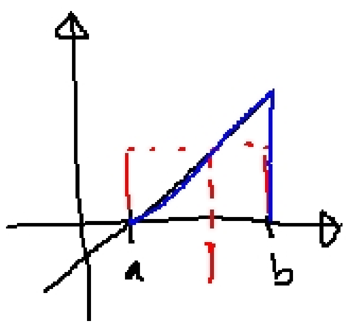
Tex: $f(x) = x$ $\quad M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx =$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)}\,2}$$

Sats (Integralkalkylens medelvärdes-sats)

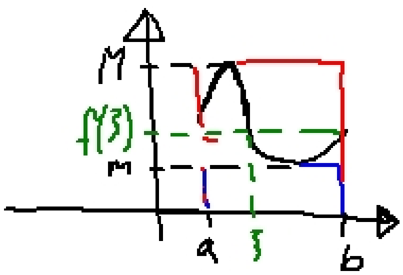
Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ så finns en punkt, ξ, i intervallet sådan att

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



$(b-a)f(\xi)$ arean hos rektangeln med bas $(b-a)$ och höjd $f(\xi)$

Bevis: Eftersom f är kontinuerlig så antar f största och minsta värdena, M resp m, i intervallet.



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$(b-a)m \leq (b-a)f(x) \leq M(b-a)$$

$m \leq f(x) \leq M$ och antar alla mellanliggande värden så det finns en punkt ξ så att

$$(b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ex (Tenta 2001-10-23, tal 10b):

Bestäm alla kontinuerliga funktioner f som uppfyller

för alla x, y. $(y-x)\,x^3 \leq \int_x^y f(t)\,dt \leq (y-x)\,y^3$.

Lösn: Medelvärdessatsen säger att

$\int_x^y f(t)\,dt = f(c)(y-x)$ för någon punkt c mellan x och y.

$\Rightarrow \quad (y-x)\,x^3 \leq f(c)\,(y-x) \leq (y-x)\,y^3$

$\overset{x<y}{\Longrightarrow} \quad x^3 \leq f(c) \leq y^3$. Låter vi $x \to y$

får vi att $f(c) \to y^3$

men $x \leq c \leq y$ så när $x \to y$

kommer $c \to y \Rightarrow f(y) = y^3$

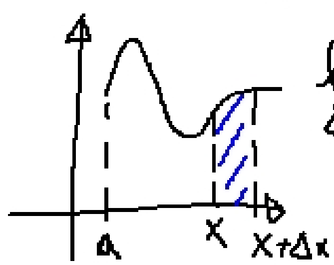
SVAR: funktionen är $f(x) = x^3$.

Existens av primitiva funktioner

Sats: Om f är kontinuerlig i $[a,b]$ så är $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$,

dvs funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ så är $F(x)$ en primitiv funktion till f.

Bevis:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

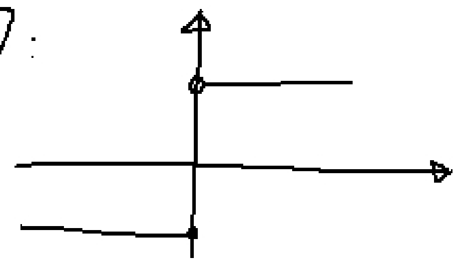
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} =$$

(medelvärdessatsen säger att det finns en punkt ξ mellan x och $x+\Delta x$ sådan att

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x \text{)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) \quad \text{för } \xi \to x \text{ när } \Delta x \to 0.$$

Ex 7.7:



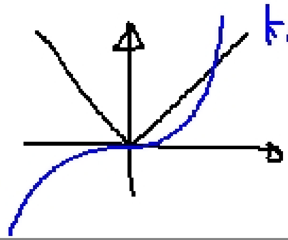
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$$

ej kontinuerlig

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \text{om } x > 0 & \int_0^x 1\,dt = x \\ \text{om } x \leq 0 & \int_0^x -1\,dt = -x \end{cases}$$

dvs $F(x) = |x|$ som ej är deriverbar då $x = 0$

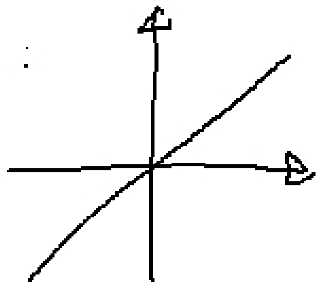
Ex: $f(x) = |x|$ kontinuerlig



$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \text{om } x > 0 & \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} \\ \text{om } x \leq 0 & \int_0^x -t\,dt = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Om visa ⇒ deriverbar

Ex:



$$f(x) = x$$

$$F_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

$$F_2(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$F_2(x) = F_1(x) - \frac{1}{2}$$

<u>Sats</u>: Om F och G är primitiva funktioner till $f(x)$ då är $F - G$ en konstant.

Bevis: $D(F - G)(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $F - G$ konstant

En funktion kallas jämn om $f(x) = f(-x)$ och udda om $f(-x) = -f(x)$.

Ex på jämna funktioner:

f konstant

$f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$

$f(x) = \cos x$

Ex på udda funktioner

$f(x) = x$

$f(x) = \sin x$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{0}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{0} x^2 dx = \begin{bmatrix} t = -x \\ dt = -dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^0 -t^2\,dt = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 t^2\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx$$

För jämna funktioner: $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_{-1}^{0} x\,dx = \begin{bmatrix} t = -x \\ dt = -dx \end{bmatrix} = \int_0^1 x\,dx + \int_1^0 (-t)(-dt)$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 t\,dt = 0$$

För udda funktioner blir $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

T ex $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$