Ex: Bestäm koefficienten för x^3 i $(2x+3)^5$.

Vi vet att

$$(2x+3)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x)^{5-k} 3^k$$

$5-k = 3 \Rightarrow k = 2$

så koefficienten för x^3-termen blir $\binom{5}{2} 2^3 3^2 = 10 \cdot 8 \cdot 9 = 720$

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$

$$\binom{5}{2}$$

Ex: Bestäm konstanttermen i $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{18}$.

Lösn: Vi har att

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{18-k} x^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{18-3k}$$

Så konstanttermen svarar mot $18-3k=0$, dvs $k=6$

Därmed blir konstanttermen

$$\binom{18}{6} = \binom{18}{12} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{6! \quad 12!}$$

Beräkning av binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{18}{6} = \frac{18!}{6!\,12!} = \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{12}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$$

$$= \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 18\,564$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \qquad n \geq k$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

induktion först över k

$P(n,k)$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

induktion över k

(ind bas) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$ $(0! = 1)$

$P(n,0)$ sant för alla $n \geq 0$.

(ind hyp) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ för alla $n \geq k$

(ind påst) $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$ för alla $n \geq k+1$

$k=2$

1

3 1

6 4

10 10

15 20

bevis av induktionspåståendet

induktion över n

(ind bas) $n=k+1$: $1=\binom{k+1}{k+1}=\dfrac{(k+1)!}{(k+1)!\,(k+1-k-1)!}$

Det stämmer

(ind hyp) $\binom{n}{k+1}=\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$

(ind påst) $\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,(\underbrace{n+1-(k+1)}_{n-k})!}$

bevis av påst

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}(n-k+k+1) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

Enl induktionsprinc. pem tagen för induktion över n så har vi bevisat

att $P(n,k+1)$ är sant
för alla $n \geq k+1$ under
antagandet att $P(n,k)$
sant för alla $n \geq k$.

Enligt induktionsprincipen
tagen för induktion över k
så gäller $P(n,k)$ för alla
$k \geq 0$, $n \geq k$.

Ex: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$n=0$	1	1	$= 2^0$
$n=1$	$1 \quad 1$	$1+1 = 2$	$= 2^1$
$n=2$	$1 \quad 2 \quad 1$	$1+2+1 = 4$	$= 2^2$
$n=3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$	$1+3+3+1 = 8$	$= 2^3$
$n=4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$	$1+4+6+4+1 = 16$	$= 2^4$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

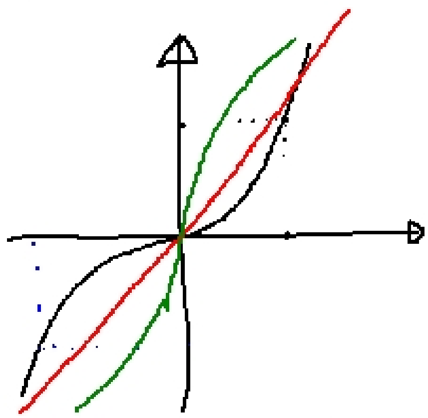
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Inversa funktioner

Def: Givet en funktion f, antag att för alla x i V_f (funktionens värdemängd, dvs de värden funktionen antar) finns precis ett reellt tal y i D_f (f's definitionsmängd) sådant att $f(y) = x$.

Funktionen $x \mapsto y$ kallas inversfunktion till f och skrivs $f^{-1}(x)$

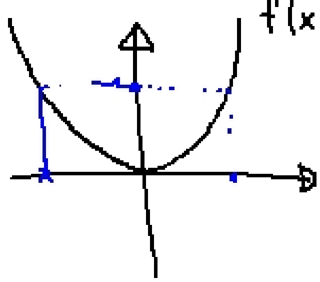
Ex: $f(x) = x^3 = y$ D_f alla reella tal



V_f alla reella tal

f har invers funktion

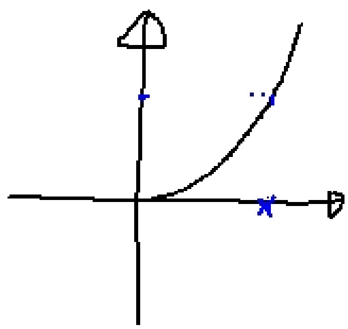
$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$



D_f alla reella tal

V_f alla tal ≥ 0.

saknar invers



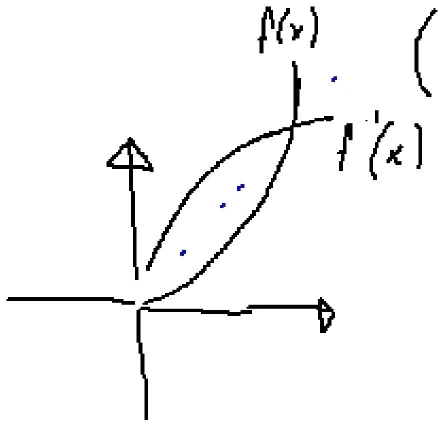
$f(x) = x^2$, $x \geq 0$

D_f

har inversfunktion

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$\left(x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y} \right)$



Grafen för f^{-1} fås genom att spegla i linjen $x=y$.

$D_{f^{-1}} = V_f \qquad V_{f^{-1}} = D_f$

Om f är strängt växande
(dvs $f(x) > f(y)$ om $x > y$)
eller strängt avtagande
($f(x) < f(y)$ om $x > y$)

så är f inverterbar