Sats: Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergenta så är

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergent

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konvergent, c konstant

$$= c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent men $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent så blir $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergent

Sats: Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

bevis: Då $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ konvergerar

har vi att $a_N = S_N - S_{N-1} \to 0$.

<u>Varning</u>! Omvändningen gäller ej!

Ex 9.8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ men $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \to \infty$$

$n \leq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$ $\qquad$ $1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Positiva serier

En serie kallas positiv om alla termerna är ≥ 0.

Sats: En positiv serie är konvergent om och endast om följden av partialsummor är begränsad.

bevis: Eftersom termerna är positiva är följden av partialsummor växande så gränsvärdet är ändligt om och endast om följden är begränsad.

Ex: $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 1$ och positiv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergent.

$S_1 = \frac{1}{2} \leq 1$, om $S_N \leq 1 \Rightarrow S_{N+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S_N \leq 1$

Sats (Majorantprincipen)

Om $0 \leq a_n \leq b_n$ för alla $n \geq 1$.

och

i) om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ (den konvergerar)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

ii) om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (divergerar)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

bevis: i) partialsummorna för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är begränsade av de för $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ följden av partialsummor är begränsad $\Rightarrow$ följden av partialsummor för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ också är begränsade.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar $\Rightarrow$ följden av partialsummor obegränsad $\Rightarrow$ samma för partialsummorna till $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

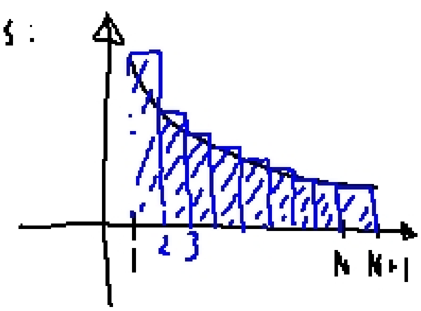
Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} < \infty$ för

$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n+1}$ för alla $n \geq 1$.

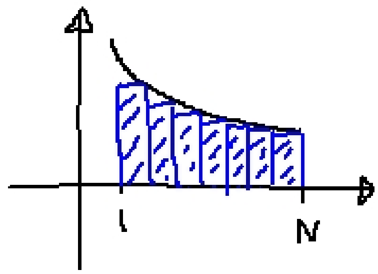
Sats (Cauchys integralkriterium)

Om f är en positiv avtagande funktion, så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Bevis:



Observera att $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ är en översumma till $\int_1^{N+1} f(x)\,dx$



Å andra sidan har vi att $\sum_{n=2}^{N} f(n)$ är en undersumma till $\int_1^N f(x)\,dx$

Vi har alltså att

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \text{och} \quad \sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx$$

konvergent $\Leftarrow$ konvergent
divergent $\Rightarrow$ divergent

konvergent $\Leftarrow$ konvergent
divergent $\Rightarrow$ divergent

Ex: Om $\alpha > 0$ så är $\frac{1}{x^\alpha}$ avtagande

och positiv för $x > 0$

Vi vet att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty \text{ precis när } \alpha - 1 > 0$$

och ∞ annars.

Cauchys integralkriterium ger

nu att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ om och endast

om $\alpha > 1$.

Speciellt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(Tenta 2002-01-08) tal 8b)

Är $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n+1}{5^n+1}$ konvergent eller ej?

$$\frac{7^n+1}{5^n+1} = \frac{7^n}{5^n+1} + \frac{1}{5^n+1}$$

Vi har att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^n+1}{5^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n\left(1+\frac{1}{7^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)} = \infty$$

serien kan inte vara konvergent då termerna ej går mot 0.

Alternativt:

$$\frac{7^n+1}{5^n+1} > \frac{7^n}{2\cdot 5^n} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2\cdot 5^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n = \infty$$

(Tenta 2001-10-23) tal 5

Undersök konvergens hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001}.$$

$$\frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001} = \frac{n^2\left(2001+\frac{10}{n}+\frac{23}{n^2}\right)}{n^3\left(23+\frac{10}{n^2}+\frac{2001}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{2001+\frac{10}{n}+\frac{23}{n^2}}{23+\frac{10}{n^2}+\frac{2001}{n^3}}\right) > \frac{1}{n} \quad \text{(Kolla det!)}$$

Viktiga är att den är nedåt begränsad $\geq c > 0$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ och $\frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001} > \frac{1}{n}$ får vi att även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001} = \infty$

Ex 3: Beräkna integralen

$$\int_2^3 \frac{3x^2+5x-6}{x^3-x^2}\,dx$$

Lösn: Partialbråksuppdelning

$$\frac{3x^2+5x-6}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)}$$

$A+C=3$ $\quad$ $C=2$

$-A+B=5$ $\quad$ $A=1$

$-B=-6 \Rightarrow B=6$

$$\int_2^3 \frac{3x^2+5x-6}{x^2(x-1)}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{6}{x^2}\,dx + \int_2^3 \frac{2}{x-1}\,dx =$$

$$= \left[\ln x\right]_2^3 + \left[-\frac{6}{x}\right]_2^3 + \left[2\ln(x-1)\right]_2^3 =$$

$$= \ln 3 - \ln 2 + (-2) + 3 + 2\ln 2 - 2\ln 1 =$$

$$= \ln 3 + \ln 2 + 1 = \ln 6 + 1.$$