Rosa Vad blir $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ?

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_a^1 =$

$= \lim_{a\to 0^+} \left(\ln|1| - \ln|a|\right) = \lim_{a\to 0^+} -\ln a = \infty$

Grön: Vad blir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ?

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \Big[2\sqrt{x}\Big]_a^1 =$

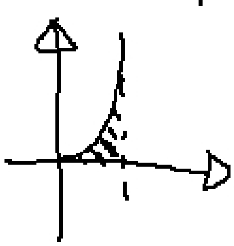
$= \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} = 2$

Gul: Vad blir $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a =$$

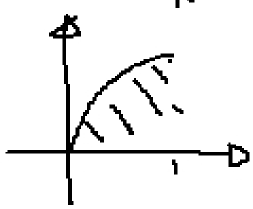
$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \lim_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = 1$$

2. Vad blir volymen när kurvan $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, roteras kring x-axeln?



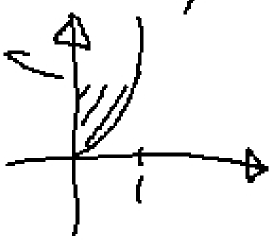

$$\pi\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Grön 7. Vad blir volymen när kurvan $y=\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$, roteras kring x-axeln?



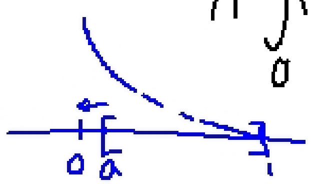

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \, dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

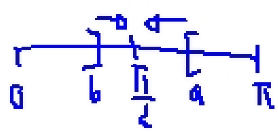
Rosa 7: Vad blir volymen när kurvan $y=x^2$, $0 \le x \le 1$, roteras kring y-axeln?




$x=\sqrt{y}$

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \, dy = \frac{\pi}{2}$$



Forts positiva serier

Sats (Jämförelseprincipen)

Om $a_n$ och $b_n > 0$ $(n=1,\dots)$

och $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$ så är

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ antingen

båda konvergenta eller båda

divergenta.

bevis: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$ så $\underbrace{\frac{A}{2}}_{A-\frac{A}{2}} < \frac{a_n}{b_n} < \underbrace{\frac{3A}{2}}_{A+\frac{A}{2}}$

för alla $n$ tillräckligt stora, säg $n \geq M$.

$$\Rightarrow \frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} \sum_{n=M}^{N} b_n < \sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{3A}{2} \sum_{n=M}^{N} b_n$$

så $\sum_{n=M}^{\infty} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=M}^{\infty} a_n = \infty$

och $\sum_{n=M}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=M}^{\infty} b_n = \infty$

och $\sum_{n=M}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=M}^{\infty} a_n < \infty$

och $\sum_{n=M}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=M}^{\infty} b_n < \infty$.

Därmed är satsen bevisad.

Ex: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-n}$ är konvergent

för $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^3-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n^3}(1-\frac{1}{n^2})}}{\cancel{\frac{1}{n^2}}} = 2 \neq 0$

Jämförelseprincipen säger nu att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-n}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar eller divergerar samtidigt.

Vi vet sedan gårdagen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar. Alltså konvergerar även $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-n}$

Ex: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-n} =$ (partialbråksuppdelning

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n-1)} = \frac{2n+1}{n^3-n} = \frac{-1}{n} + \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{3}{2}}{n-1} \Big) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{n} + \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{3}{2}}{n-1} = \left(-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{-\frac{1}{2}}{3}} + \frac{\frac{3}{2}}{1}\right) +$$

$$\left(\cancel{\frac{-1}{3}} + \cancel{\frac{-\frac{1}{2}}{4}} + \frac{\frac{3}{2}}{2}\right) + \left(\cancel{\frac{-1}{4}} + \frac{-\frac{1}{2}}{5} + \cancel{\frac{\frac{3}{2}}{3}}\right) + \left(\frac{-1}{5} + \frac{-\frac{1}{2}}{6} + \cancel{\frac{\frac{3}{2}}{4}}\right) + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001n^2 + 10n + 23}{23n^3 + 10n + 2001} = \infty$

Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}}\left(\frac{2001+\frac{10}{n}+\frac{23}{n^2}}{23+\frac{10}{n^2}+\frac{2001}{n^3}}\right)}{\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2001}{23} \neq 0$$

Då $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent är även

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001n^2+10n+23}{23n^3+10n+2001}$$ divergent.

<u>Sats</u>: Om $a_n = \frac{c}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ där $c$ är en konstant, $c \neq 0$, och $\beta > \alpha$ då är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent om $\alpha > 1$ och divergent annars.

bevis: Sätt $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ Det ger

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} c + O\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right)$$

$$= c \neq 0$$

Jämförelseprincipen ger att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent precis när $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är det, dvs då $\alpha > 1$.

Ex 9|3: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ är divergent för $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

dvs $\alpha = 1$. i satsen ovan.

(Tenta 2002-08-15, tal 7):

Avgöra om serien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

är konvergent eller ej.

Lös Cosinus har MacLaurinutvecklingen

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$$

$$\Rightarrow \quad 1-\cos\frac{1}{n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (\alpha = 2 \text{ i satsen})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ konvergent}$$

ger $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ konvergent

**Sats** (Cauchys rotkriterium)

Om $a_n \geq 0$ och $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$

och $\begin{cases} A<1 & \text{så är } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \\ A>1 & \text{så är } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.} \end{cases}$

bevis: Om $A>1$ blir $\sqrt[n]{a_n} > 1$ för stora $n$, $n \geq M$, då är även $a_n > 1$ för $n \geq M$ så $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, vilket motsäger konvergens.

Om $A<1$, så finns $B$, $A<B<1$ så att $\sqrt[n]{a_n} \leq B$ för $n \geq M$ säg. Det ger $a_n \leq B^n$ för $n \geq M$. Majorantprincipen

Säger att $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ är konvergent för $\sum_{n=n}^{\infty} B^n$ är konvergent.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ konvergerar för

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

---

(Tenta 2001-10-23, tal 4): Visa med hjälp av induktion att $5^n - 1$ är jämnt delbart med 4 för $n = 1, 2, 3 \ldots$

Lösn: (induktionsbas) $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ OK induktionsantagandet)

Antag att påståendet är sant för $n=p$, dvs $4 \mid 5^p-1$.

(induktionspåståendet)

då gäller det även för $n=p+1$, dvs att $4 \mid 5^{p+1}-1$.

(Bevis av induktionspåståendet)

$$5^{p+1}-1 = 5\cdot 5^p - 1 = 5\cdot(5^p-1) + 5 - 1 = 5(5^p-1)+4$$

som är jämnt delbart med 4 för $4 \mid 5^p-1$ och $4 \mid 4$.

Enligt induktionsprincipen gäller så påståendet för alla $n \geq 1$.