Sats (d'Alemberts kvotkriterium)

Om $a_n > 0$ för $n \geq 1$ och

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ då gäller att

om $A < 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

om $A > 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

bevis: Om $A > 1$ så finns ett tal M så

att $a_n \geq a_M$ för alla $n > M$ men

det betyder att $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \geq a_M > 0$.

Serien kan därför inte vara konvergent.

Om $A<1$ finns det ett tal B, $A<B<1$, så att $\frac{a_{n+1}}{a_n}<B$ för alla n större än något tal M.

Vi får alltså $a_{n+1}<Ba_n$, $a_{n+2}<B^2a_n$ osv

$\Rightarrow$ $a_{M+n}<B^n a_M$. Majorantprincipen ger att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar för $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ majoreras av $a_M \sum_{n=1}^{\infty} B^n$, som är konvergent.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergera för

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ divergerar för

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{n^2}{(n+1)^2} = 3 > 1$$

Ex 9.17: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerar för $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

Ex: Om $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ kan serien både konvergera och divergera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

divergent

Alternerande serier

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

där alla $a_n > 0$ eller alla < 0

Ex: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Sats (Leibniz kriterium för alternerande serier)

Om $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ är en alternerande serie, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ och $a_n \geq a_{n+1}$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent bevis $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

Antag $a_n > 0$

då $a_n \geq a_{n+1}$ blir följden S_{2n} växande. Vi kan också skriva om S_{2n} som

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow S_{2n} \leq a_1$ så följden S_{2n} är begränsad vilket ger att $\lim_{n \to \infty} S_{2n} = S$ för något tal S.

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S$$

så partialsummorna har ett gränsvärde

och $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergerar.

Ex: 9.?? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ och $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

så serien konvergerar.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - \ldots$

$\lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0$ så vi kan inte

använda kriteriet.

Ex: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \qquad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$

Leibniz kriterium ger så

att serien konvergerar.

Absolut konvergens

Sats (Om absolut konvergens)

Om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar så

konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

bevis: Om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar så

sätter vi $b_n = |a_n| + a_n$. Observera

att $b_n \geq 0$ och $2|a_n| \geq b_n$.

Majorantprincipen ger att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar

Men $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ så den blir konvergent

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ konvergerar för

absolut konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ majoreras av $\sum_{n=1} \frac{1}{n^3}$

som är konvergent.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergerar men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

betingat konvergent

divergerar.

Serien kallas absolut konvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar och betingat konvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar men $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerar.

Funktionsserier

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ξ ligger mellan 0 och x

MacLaurinserie:

$$f(x) = \overbrace{f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}^{P_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

antag att $\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

det ger $\lim_{n \to \infty} f(x) - P_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Vi får då $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

Polynomen $p_n(x)$ är partialsummor till $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

Ex: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\xi} \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Det viktiga är att e^{ξ} inte beror av n, däremot beror den av x eftersom ξ ligger mellan 0 och x

Ex: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + R_n(x)$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = D^{n+1} \sin x \big|_{x=\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

för $\left| D^{n+1} \sin x \big|_{x=\xi} \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Motsvarande blir: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$

Verifiera $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

genom att sätta in ix i serien

för e^x.

(Tenta 2001-10-23, tal 9):

Vilket är störst $2\arcsin\frac{1}{3}$ eller $\arccos\frac{2}{3}$?

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\,\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{45}{81} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} > \frac{32}{81} = \left(\frac{2\sqrt{8}}{9}\right)^2$$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} > \frac{2\sqrt{8}}{9}$ för talen är > 0

Vi har så att

$$\sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right) > \sin\left(2\arcsin \frac{1}{3}\right)$$

$$0 < \arccos \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < 2\arcsin \frac{1}{3} < 2\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2}$$

och sinus är växande och inverterbar på intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ så

$$\arccos \frac{2}{3} > 2\arcsin \frac{1}{3}.$$