$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = D \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{D(x^{2n+1})}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\, x^{2n}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ex: MacLaurinserien för $\frac{1}{1-x}$ är $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerar om $|x|<1$

och divergerar om $|x|>1$

$x = 1$ ger $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ Divergent

$x = -1$ ger $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ Divergent

Vi vet att

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Om $|x| < 1$ har vi $\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ så

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ om } |x| < 1$$

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Om $|x| > 1$ blir $\lim_{n \to \infty} |x|^{n+1} = \infty$ så $\frac{1}{1-x} \neq \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

OBS! $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty$ men $\frac{1}{1-2} = -1$

Vi kan således inte säga något om funktionen när serien divergerar.

Ex: Man kan visa att för $-1 \leq x \leq 1$ gäller att $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Övn 9.7b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln n =$

$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + (\ln 4 - \cancel{\ln 3}) + \ldots$ $\to 0$

$= -\ln 1 = 0$

Problem vi får svaret 0 men det är uppenbart fel. Orsaken är att serien divergerar.

Om vi skriver $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ser vi att $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$$

Jämförelseprincipen ger nu att $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ divergerar för $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar.

Konvergenskriterier för generaliserade integraler

Problem: Hur avgör man konvergens hos generaliserade integraler där integranden ej kan integreras på enkelt sätt?

Sats (Majorantprincipen för positiva integrander)
Om $0 \le f(x) \le g(x)$ i en omgivning av a och i) $\int^{a} g(x)\,dx$ konvergerar så konvergerar även $\int^{a} f(x)\,dx$.

ii) $\int^{a} f(x)\,dx$ divergerar så

divergerar även $\int^{a} g(x)\,dx$.

<u>Sats</u> (Jämförelseprincipen för positiva integrander)

Om $f(x)$ och $g(x) > 0$ i en omgivning av a och $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ så

är $\int^{a} f(x)\,dx$ och $\int^{a} g(x)\,dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

<u>Sats</u> (Principen om absolut konvergens)

Om f är styckvis kontinuerlig och $\int^{a} |f(x)|\,dx$ är konvergent så är också $\int^{a} f(x)\,dx$ konvergent.

Ex 9.26 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

För $x \geq 1$ så gäller $e^{-x^2} \leq e^{-x}$

och $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^{a} =$

$= \lim_{a\to\infty} \left(-e^{-a} + e^{-1}\right) = e^{-1}$ så konvergent

Så enligt majorantprincipen är även $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergent.

Integralen $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ blir därmed konvergent.

Ex: Visa att $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ konvergerar då $x>0$.

Om $x<1$ är 0 också en singulär punkt

Vi börjar med $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$. Vi kan majorera

$t^{x-1}e^{-t}$ med t^{x-1} och

$\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ är konvergent

$(x-1 > -1)$

Vi betraktar så $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Vi kan

majorera $t^{x-1}e^{-t}$ med $t^{[x]}e^{-t}$

Upprepad partialintegration visar att

$\int_1^\infty t^{[x]}e^{-t}\,dt$ konvergerar så

Majorantprincipen ger att $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ konvergerar.

Sats $\int_0^x O(t^n)\,dt = O(x^{n+1})$ x litet

bevis: $f(t) = O(t^n) \iff |f(t)| \le C|t^n|$

om t litet $\Longrightarrow \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \le \int_0^x |f(t)|\,dt$

$\le C\int_0^x t^n\,dt = C' x^{n+1}$

Ex: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$\int \sin x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + O(x^6) + C$

(Tenta 2002-01-08. tal 4):

Beräkna integralen $\int_0^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_0^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right]$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_{\sqrt{a}}^1 \arctan\left(\frac{1}{t}\right)2t\,dt =$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left[t^2\arctan\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{a}}^1 - \int_{\sqrt{a}}^1 \cancel{t^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{\cancel{t^2}}\right)dt =$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left[t^2\arctan\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{a}}^1 + \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left[t^2\arctan\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{a}}^1 + \int_{\sqrt{a}}^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(\left[t^2 \arctan \frac{1}{t} \right]_{\sqrt{a}}^{1} + \int_{\sqrt{a}}^{1} 1 \, dt - \int_{\sqrt{a}}^{1} \frac{1}{1+t^2} \, dt \right) =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(\left[t^2 \arctan \frac{1}{t} \right]_{\sqrt{a}}^{1} + \left[t \right]_{\sqrt{a}}^{1} - \left[\arctan t \right]_{\sqrt{a}}^{1} \right)$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \Big(\cancel{\arctan 1} - a \arctan \frac{1}{\sqrt{a}} + 1 - \sqrt{a} - \cancel{\arctan 1} +$$

$$+ \arctan \sqrt{a} \Big) = 0 + 1 - 0 + 0 = 1$$