Beräkna konstanttermen i $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^{12}$.

V: Vill ha koefficienten framför x^0. $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{12-k}(x^3)^k =$

$= \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}2^{12-k}x^{k-12}x^{3k} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}2^{12-k}x^{4k-12}$

x^0 termen ges av $4k-12=0 \Rightarrow k=3$

Koefficienten blir $\binom{12}{3}2^{12-3}=\binom{12}{3}2^9$ saknar heltalslösning

Koefficienten framför x blir noll för $4k-12=1$

$$\lim_{a \to 0^+} a \cdot \arctan \frac{1}{a} = 0$$

för $$\lim_{a \to 0^+} \arctan \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t \to \infty} \arctan t \qquad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tan \theta = \infty$$

Vi söker θ så att $\tan \theta = \infty$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \arccos(-1) \qquad -1 = \cos x \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

Låt $f(x) = \begin{cases} 3x+b & x \geq 1 \\ 2-x^2 & x < 1 \end{cases}$

bestäm b så att f blir kontinuerlig.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$3x+b$ och $2-x^2$ är kontinuerliga så enda problemet är $x=1$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x+b = 3+b$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2-x^2 = 1 \qquad 3+b=1$$

$$b=-2$$

(Tenta 2002-01-08, tal 7b (2p)).

Härled derivatan av $f(x) = \frac{1}{x}$

utgående från derivatans definition.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{(\Delta x)} \cdot x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

(Tenta 2001-10-23, tal 2 (3p)):

Ekvationen $xy^3 + 4x^2y = 16$ definierar

en funktion $y = y(x)$, sådan $y(1) = ?$

Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan y i punkten $(1,2)$.

Lösn: Implicit derivering av $xy^3 + 4x^3y = 16$ ger

$$y^3 + 3xy^2y' + 12x^2y + 4x^3y' = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{(y^3 + 12x^2y)}{3xy^2 + 4x^3} \Rightarrow y'(1) = -\frac{(2^3 + 12 \cdot 1^2 \cdot 2)}{3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^3} =$$

$$= -2.$$

Tangentens ekvation

$$y_1 = kx + m$$

$$y_1 = y'(1)x + m = -2x + m$$

$$\Rightarrow \quad m = y_1(1) + 2 \cdot 1 = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

(tangenten går genom punkten $(1,2)$)

Tangentens ekvation $2x + y = 4$.

(Tenta 2001-10-23, tal 6 (4p)).

Bestäm och karakterisera lokala extrempunkter till $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} + \arctan x$

Bestäm värdemängden till f.

Lösn: $$f'(x) = \frac{-1(1+x^2) - (1-x)2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ när $2x(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Teckenstudie

		0		1	
f	$\nearrow\nearrow\nearrow$		$\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow$
f'	$+++$	0	$---$	0	$+++$
		lok max		lok min	

$f(0) = 1$

$f(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{1+x^2} + \arctan x = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} + \arctan x$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} \text{ och } > 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{1+x^2} + \arctan x = -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} \text{ och } < 1$$

så värdemängden till f blir $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

funktionen saknar största och minsta värde.

(Tenta 2002-01-16, 1a) 3 (3p)):

Är det sant att $e^x(1-x) \leq 1$ för alla x?

Lösn: $f(x) = e^x(1-x) - 1$ $\quad f'(x) = -xe^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Teckenstudie

		0	
f	$\nearrow \nearrow$		$\searrow \searrow$
f'	$+ + +$	0	$- - -$
		max	

$f(0) = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(x) \leq 0 \ \forall x$ (för all)

$\Rightarrow$ påståendet är sant.

(Tal 10 (4p)): Man tillämpar medelvärdessatsen $f(x) - f(0) = x f'(\theta x)$ $(0 \le \theta \le 1)$

på funktionen

$$f(x) = a + bx + ce^{ax}, \quad ac \neq 0.$$

Detta definierar θ som en funktion av x. Beräkna $\lim_{x \to 0} \theta(x)$.

Lösn: $f(x) - f(0) = a + bx + ce^{ax} - a - c =$

$= bx + c(e^{ax} - 1).$

$$f'(\theta(x)x) = b + ac\, e^{a\theta(x)x}$$

$$\cancel{b}x + c\left(e^{ax}-1\right) = x\left(\cancel{b} + ace^{a\theta(x)x}\right)$$

$(c \neq 0)$

$$\cancel{c}\left(e^{ax}-1\right) = a\cancel{c}\,x\,e^{a\theta(x)\cdot x}$$

$$\ln\left(e^{ax}-1\right) = \ln(ax) + a\theta(x)\cdot x$$

$\ln(1+x) =$
$= x + O(x^2)$

$$\theta(x) = \frac{1}{ax}\ln\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax}\ln\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax}\ln\left(\frac{\cancel{1}+ax+\frac{a^2x^2}{2}+O(x^3)-\cancel{1}}{ax}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax}\ln\left(1+\left(\frac{ax}{2}+O(x^2)\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{ax+O(x^2)}{ax\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

(Tenta 2001-10-23, tal 1 (3p)):

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x\arctan(2x) - \ln(1+4x^2)}{x-1+e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x\left(2x+O(x^3)\right) - 4x^2 + O(x^4)}{x-1+1-x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x^2-4x^2+O(x^3)}{\frac{x^2}{2}+O(x^3)} = 8.$$

Alt L'Hôpital: $= \lim_{x\to 0} \dfrac{4\arctan 2x + \frac{4x\cdot 2}{1+(2x)^2} - \frac{8x}{1+4x^2}}{1-e^{-x}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8}{1+(2x)^2} + \frac{8}{1+(2x)^2} - \frac{8x\cdot 4x}{(1+(2x)^2)^2} - \frac{8}{1+4x^2} + \frac{8x\cdot 8x}{1+4x^2}}{e^{-x}} = 8.$$

(Tenta 2002-08-15, tal 7 (3p)):

MacLaurinutveckla $f(x) = \arctan(1+3x)$ till och med andra graden.

Lösn: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + O(x^3)$

$$f(0) = \arctan(1+3\cdot 0) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(0) = \left.\frac{3}{1+(1+3x)^2}\right|_{x=0} = \frac{3}{2}$$

$$f''(0) = D\left(\frac{3}{2+6x+9x^2}\right)\bigg|_{x=0} = -\left.\frac{3(6+18x)}{(2+6x+9x^2)^2}\right|_{x=0} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{4} + O(x^3)$$

- Taylorutveckla samma funktion kring $a=1$, till och andra graden.

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

$$f(1) = \arctan(1+3\cdot 1) = \arctan 4$$

$$f'(1) = \frac{3}{2+6+9} = \frac{3}{17}$$

$$f''(1) = -\frac{3(6+18\cdot 1)}{(2+6\cdot 1+9\cdot 1^2)^2} = -\frac{72}{289}$$

$$f(x) = \arctan 4 + \frac{3}{17}(x-1) - \frac{36}{289}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

(Tal 4 (3p)): Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y = e^{-x}\sin x$$

Lösn: Homogena ekvationen $y'' - y = 0$

Karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow r = \pm 1$

Allmänna lösningen $y_h = Ae^{x} + Be^{-x}$

Ansätt $y_p = z(x)\,e^{-x}$

Förskjutningsregeln ger karakteristiska ekvationen för z: $(r-1)^2 - 1 = r^2 - 2r$

$\Rightarrow z'' - 2z' = \sin x.$

$$z'' - 2z' = \sin x$$

Ansätt $z_p = a\sin x + b\cos x$

$$z_p'' - 2z_p' = -a\sin x - b\cos x - 2a\cos x + 2b\sin x =$$

$$= (-a+2b)\sin x + (-b-2a)\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 & \quad -a-4a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{5} \\ b+2a=0 \Rightarrow b=-2a & \quad b=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y_p = z_p \cdot e^{-x} = \left(-\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x\right)e^{-x}$$

$$y = y_h + y_p.$$

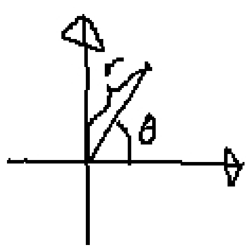
Övn: $x^2+y^2=6x$ Beräkna arean innanför kurvan

$$x^2-6x+y^2=0$$
$$(x-3)^2+y^2=9=3^2$$

en cirkel med radie 3, centrerad i punkten $(3,0)$. Arean $=9\pi$

Alt polärt: $x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

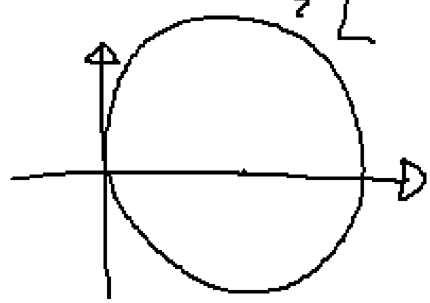


$$x^2+y^2=r^2 \qquad \Rightarrow \quad r=6\cos\theta$$
$$6x=6r\cos\theta$$
$$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

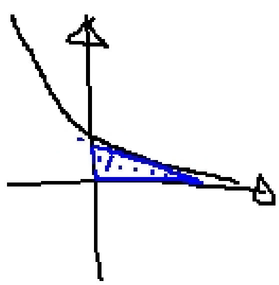
$$\text{Arean} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{36\cos^2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{18}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 9\pi$$



Bestäm den punkt (a,b) i högra halvplanet på kurvan $y=e^{-x}$ som är sådan att arean av den triangel som bildas av koordinat-axlarna och tangenten till kurvan i (a,b) blir så stor som möjligt.



$y' = -e^{-x}$ tangentens ekvation

$$y_t = -e^{-a}x + m$$

$$m = y_t(a) + e^{-a}a = b + e^{-a}a$$

$$= b(1+a)$$

Area $A(a) = \int_0^{1+a} -bx + b(1+a)\,dx = \frac{b}{2}(1+a)^2$

(punkten (a,b) ligger på kurvan, så $b = e^{-a}$) $= \frac{e^{-a}}{2}(1+a)^2$

$$A'(a) = -\frac{e^{-a}}{2}(1+a)^2 + \frac{e^{-a}}{2}\,2(1+a) = \frac{e^{-a}}{2}(1+a)(1-a)$$

	0		1	
A		$\nearrow\ \nearrow$		$\searrow\ \searrow$
$A'(a)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
			lok max	

$\Rightarrow$ Arean blir maximal: punkten $(1, e^{-1})$

Arean $= \frac{2}{e}$.

(Tenta 2002-01-08, upg 5b (3p))

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då funktionen $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ roterar kring x-axeln.

Lösn:
$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{(1-x^2)}{(1-x^2)} + \frac{1}{1-x^2}\,dx = -\pi \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big[-\ln|1-x| + \ln|1+x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(-\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(\ln 3 - 1)$$