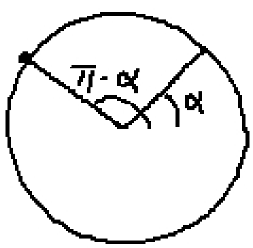
Ex. Lös ekvationen

$$\arcsin x = \operatorname{arccot} x \quad -1 \leq x \leq 1$$

Lösn. Vi börjar med att lösa

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\operatorname{arccot} x)$$



OBS! $\sin\alpha = \sin\beta$

$$\iff \alpha = \begin{cases} \beta + 2\pi n \\ \pi - \beta + 2\pi n \end{cases} \quad n \text{ heltal}$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Vi har alltså ekvationen

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Vi kvadrerar bägge leden

$$x^2 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\text{OBS!} \quad \begin{array}{l} a=b \Rightarrow a^2=b^2 \\ a^2=b^2 \not\Rightarrow a=b \end{array} \right)$$

$$(-1)^2 = 1^2 \qquad -1 \neq 1$$

Vi flyttar om

$$x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^4 + x^2 - 1 = 0$$

ger $x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$(u = x^2 \quad u^2 + u - 1 = 0)$

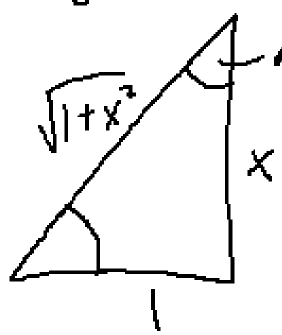
men $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Vi får så $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Då $x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ kan lösningen

$x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ förkastas.

Vi måste avslutningsvis testa att $x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ är en lösning.



$\operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Vårat x uppfyller $x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ så

$$\arcsin x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccot} x.$$

$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ är därmed lösningen till ekvationen

Hyperboliska funktioner

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Minns $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, vi kan då skriva $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

så $\sin ix = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = -\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = i\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$

$= i \sinh x$

$$\cos ix = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$$

Trigonometriska ettan

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

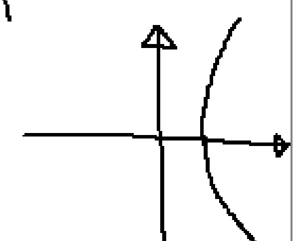
$$\cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1$$

$$\cosh^2 x + (i \sinh x)^2 = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$x \geq 0$

$x^2 - y^2 = 1$



Hyperboliska ettan

Punkterna $(\cosh x, \sinh x)$ ger en hyperbel

Ex: $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

$$\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x =$$

$$= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y} + e^{x+y} + \cancel{e^{y-x}} - \cancel{e^{x-y}} - e^{-y-x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) = \sinh(x+y)$$

Ex: Lös ekvationen

$$\cosh x = 2$$

Lösn: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} = 4$

Sätt $u = e^x$ $\quad u + \dfrac{1}{u} = 4$

$\Rightarrow u^2 - 4u + 1 = 0$

$e^x = u = 2 \pm \sqrt{3}$

Svar: $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$

Ex: $\sinh x = \sinh y$

$\iff x = y$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{\cancel{2}} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{\cancel{2}}$$

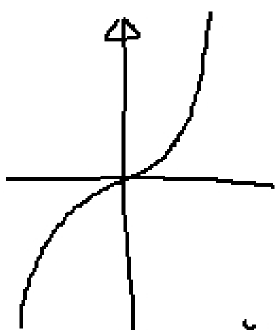
Sätt $t = e^{x}$, $s = e^{y}$

Ekvationen blir då:

$$t - \frac{1}{t} = s - \frac{1}{s} = \frac{s^2 - 1}{s}$$

$$t^2 + t\left(\frac{1 - s^2}{s}\right) - 1 = t^2 - t\left(\frac{s^2 - 1}{s}\right) - 1 = 0$$

$$t = \begin{cases} s \\ -\frac{1}{s} \end{cases}$$ men $t = e^{y} > 0$ så $t = s$, dvs $x = y$.



sinh x är alltså inverterbar.

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$u = e^x$: $$u^2 - 2yu - 1 = 0$$

$$0 < e^x = u = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

Sammansatta funktioner

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$t = e^x$ $\qquad \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} = \dfrac{t^2 - 1}{2t}$

$f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{2t}$, $g(x) = e^x$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \sinh x$$

sammansättningen av f och g

$$f \circ g \neq f \cdot g$$

Ex: Lấy $g(x) = 1 + x$, $h(x) = \sin x$.

$$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(\sin x) =$$
$$= 1 + \sin x$$

$$h \circ g(x) = h(g(x)) = h(1+x) =$$
$$= \sin(1+x)$$