Om f och g är två funktioner definierade för alla reella tal då kan vi bilda

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Ex: $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$

$$h \circ g(x) = \ln(e^x) = x$$

$$g \circ h(x) = e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

Så det räcker att funktionen f är definierad på V_g för att $f \circ g$ ska vara väldefinierad

Vi kan också ta $f \circ g$ på g's definitionsområde.

Ex: $\sin(\arcsin x) = x \qquad -1 \leq x \leq 1$

$\arcsin(\sin x) = x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Ex: Bestäm en funktion $g(t)$ sådan att $g(1+x) = \frac{3-x}{x+2}$

Vi kan skriva om

$$\frac{3-x}{x+2} = \frac{4-(x+1)}{(x+1)+1}$$

$$\frac{3-x}{x+2} = \frac{3-(x+1)+1}{(x+1)-1+2}$$

så $g(t) = \frac{4-t}{t+1}$

Ex: $f \circ f^{-1}(x) = x \quad f^{-1} \circ f(x) = x$

Ex: Låt $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Vad blir $f \circ f$?

$$f \circ f(x) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x$$

Ex: Bestäm funktionen $g(t)$ sådan att $g(1+x) = \sin x$.

Vi byter x mot $1+x$:

$$\sin x = \sin((x+1)-1) =$$

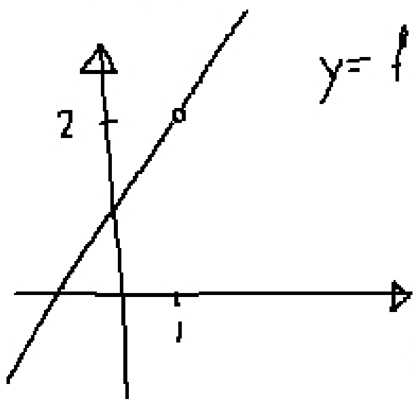
$$= \sin(x+1)\cos(-1) + \sin(-1)\cos(x+1)$$

$$= \cos 1 \cdot \sin(x+1) - \sin 1 \cos(x+1)$$

Vi sätter så

$$g(t) = \cos 1 \cdot \sin t - \sin 1 \cdot \cos t.$$

Gränsvärden

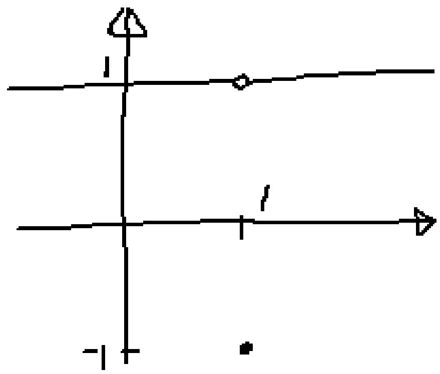


$$y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad x \neq 1$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$

När x närmar sig 1, från vänster eller höger, så går funktionsvärdet mot 2.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$



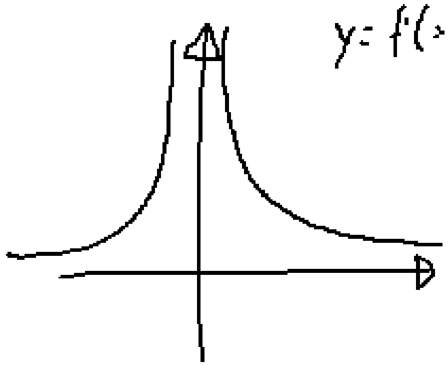
$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

När x närmar sig 1 går funktionen mot 1.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

Dubbelsidiga, egentliga gränsvärden

f konvergerar då $x \to 1$.

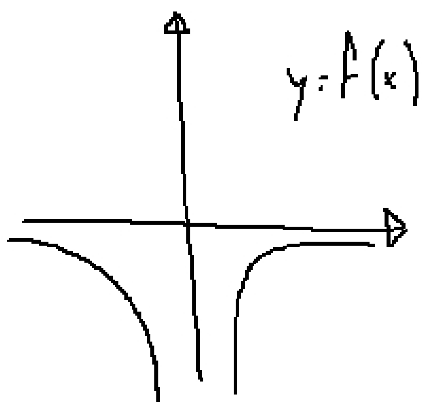


$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

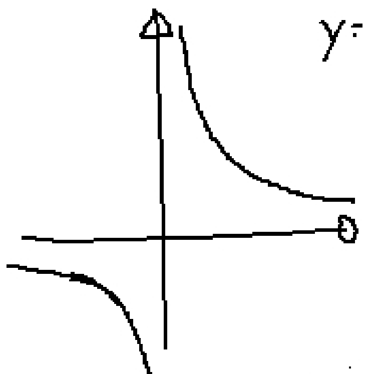
Oegentliga gränsvärden

funktionen divergerar



$y = f(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$



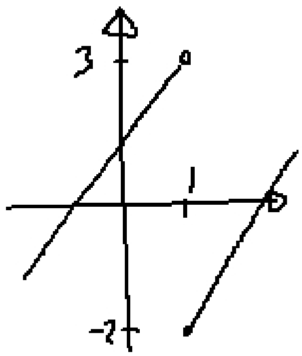
$y = f(x) = \frac{1}{x}$

Om $x > 0$ och vi närmar oss $x = 0$ så blir $f(x)$ obegränsad positiv men om $x < 0$ så blir $f(x)$ obegränsat negativ. Gränsvärdet existerar ej.

Vi har dock ensidiga oegentliga gränsvärden

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

Ex:



$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x<1 \\ x-3 & x \geq 1 \end{cases}$$

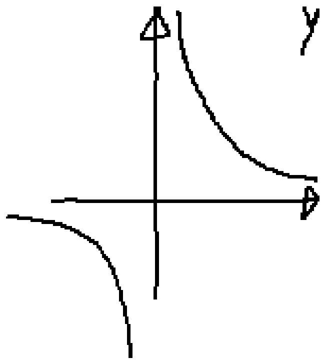
Om $x > 1$ kommer $f(x)$ gå mot -2 när x närmar sig 1 men när $x < 1$ närmar sig värdet $f(x)$ 3. Det dubbelsidiga gränsvärdet finns inte. Däremot har vi:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$$

vänster gränsvärde   höger gränsvärde

Om både höger- och vänster gränsvärde finns och de är lika, så finns även dubbelsidiga gränsvärdet och

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

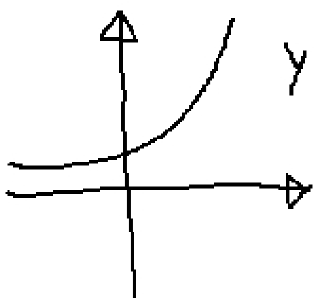


$y = f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

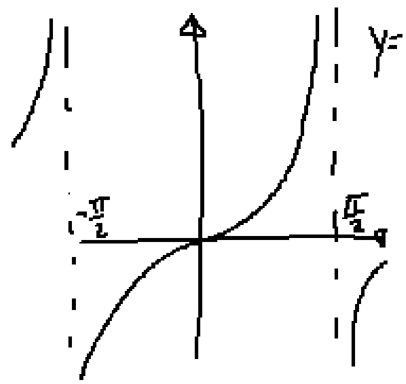
Egentliga gränsvärden när $x \to \pm\infty$.



$y = e^x = f(x)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{oegentligt}$$

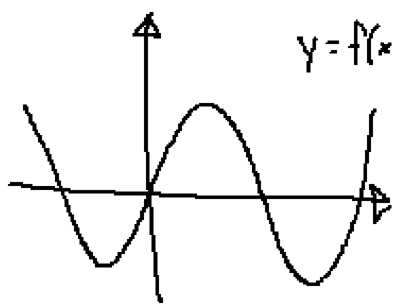
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{egentligt}$$



$y = f(x) = \tan x$

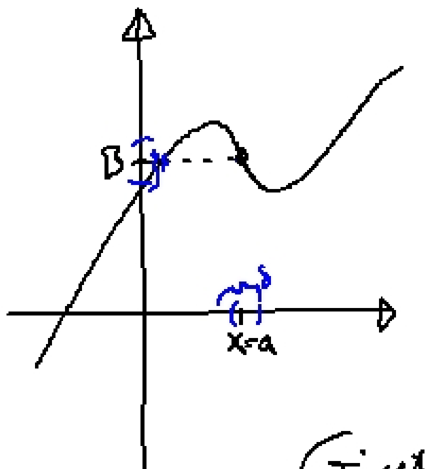
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

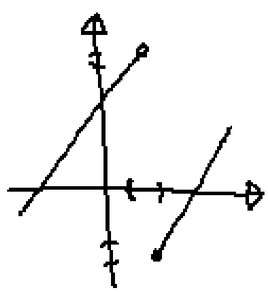


$y = f(x) = \sin x$

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ existerar inte!



$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$



Givet $\varepsilon > 0$ då ska det finnas ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - B| < \varepsilon \quad \text{för} \quad \overbrace{0 < |x-a| < \delta}^{\text{alla } x \text{ så}}$$