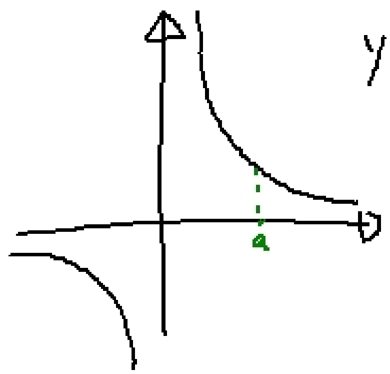
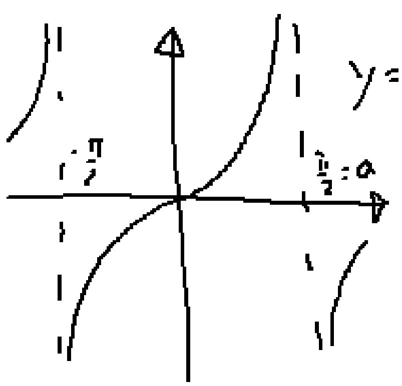


$y = f(x) = \frac{1}{x}$

f är strängt avtagande

Finns vänstergränsvärde när $x \to a$



$y = \tan x$

$\tan x$ växer obegränsat när $x \to a$ så

$\lim_{x \to a} \tan x = \infty$ oegentligt

Monotona funktioner:

En växande/avtagande funktion har alltid ett (egentligt eller oegentligt) gränsvärde när $x \to a^-$ (samma för $x \to a^+$)

Om funktionen är uppåt resp nedåt begränsad så är gränsvärdet egentligt.

Om f är en elementär funktion, eller uppbyggd av elementära funktioner med hjälp av de fyra räknesätten,

(Ex. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

så gäller det att

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{för } a \text{ i } D_f.$$

Ex: $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

Ex: $\lim_{x \to 0} \sinh x = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} =$

$= \frac{e^{0} - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = \sinh 0$

Ex: $\lim_{x \to 3} \frac{x-4}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \to 3} x-4}{\lim_{x \to 3} x^2+1} =$

$= \frac{3-4}{(\lim_{x \to 3} x)^2+1} = \frac{3-4}{3^2+1} = \frac{-1}{10}$

Ex: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

Försöker vi stoppa in $x=1$ får vi $\frac{0}{0}$!

Eftersom $1^2-1=0$ så gäller det att

$$(x-1) \mid x^2-1$$

Utför divisionen...

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

Ex: $\lim_{x \to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

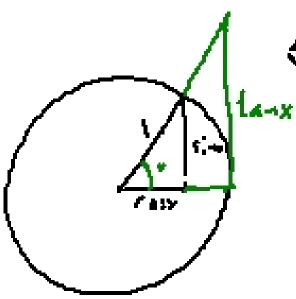
$$= \lim_{x \to 1} 2(x+1) = 2\cdot(1+1) = 4$$

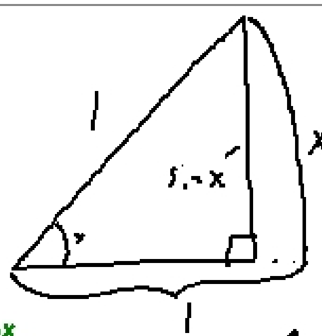
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \ ?$$

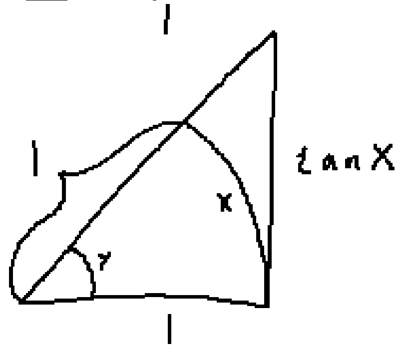
Vi börjar med att konstatera att det räcker att betrakta

$x > 0$: $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$





$$x \geq \sin x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$1 \geq \frac{\sin x}{x}$$



$$\tan x \geq x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} \geq x$$
$$\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Vi får så $\tan x \geq x \geq \sin x$

Alltså $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$

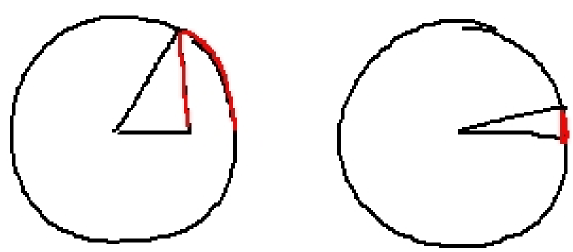
Eftersom $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ och

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ så säger

instängningsprincipen att

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ existerar och

att $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



$$\text{Ex: } \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \to 0} 7 \frac{\sin 7x}{7x} =$$

$$= 7 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7$$

($g(x) = 7x$ $\quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$ så blir

$f \circ g(x) = \frac{\sin 7x}{7x}$)

Vi har att $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

så

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Ex: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+5x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2-2}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2+5x+1}$

$= \dfrac{\infty}{\infty}$??

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+5x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 1-\frac{2}{x^2}\to 0}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\underset{\searrow 0}{\frac{5}{x}}+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}} =$

$= \dfrac{1}{1} = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^5+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^5\left(1+\frac{4}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}{x^3\left(1+\underbrace{\frac{4}{x^5}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{Ex: } \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-y\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$