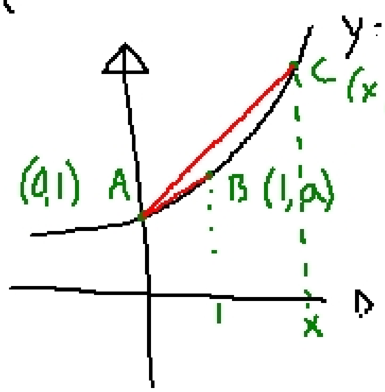
$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty}$$

$a>1$, α konstant

$$\left(\quad 2^n > n^2 \qquad n \geq 5 \quad \right)$$



Lutningen hos AC ≥ Lutningen hos AB

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^x - 1}{x - 0} \geq \frac{a - 1}{1 - 0} = a - 1$$

$$\Rightarrow a^x \geq x(a-1) + 1 > x(a-1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^x}{x^\alpha} > \frac{x(a-1)}{x^\alpha} = x^{1-\alpha}(a-1)$$

Om $\alpha < 1$ så $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha} = \infty$

så $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} \geq \lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha}(a-1) = \infty$

Om $\alpha \geq 1$ så skriver vi om uttrycket

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha}} = \left(\frac{a^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\alpha} \quad < 1$$

Det ger att $\dfrac{a^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ är på samma form som tidigare.

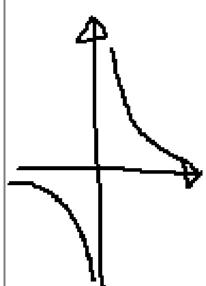
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\frac{a^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{1}{2}}}}_{\to\infty}\right)^{2\alpha} = \infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0 \qquad a>1,\ \alpha>0}$$

Set $t=\log_a x$, $\quad x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{(a^t)^{\alpha}}=0$$

$$x=a^{\log_a x} \qquad\qquad \frac{a^t}{t^{1/\alpha}}\to\infty$$



$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\log_a x=0 \qquad a>1,\ \alpha>0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\log_a x=\begin{bmatrix} x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x}\\ x\to 0^+,\ t\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha}\log_a\frac{1}{t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha}(-\log_a t)=0$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$[a] = 2$

$a = 2,5$

$n > a$

$3 = [a] + 1$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot \ldots \ldots a}{n(n-1) \ldots 1} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdots \frac{a}{1}$$

Om n är stort

$$\underline{\underline{\frac{a}{n}}} \cdot \overset{<1}{\frac{a}{n-1}} \cdots \overset{<1}{\frac{a}{[a]+1}} \cdot \underbrace{\frac{a}{[a]} \cdots \frac{a}{1}}_{\text{ngn konstant } C \text{ som inte beror av } n}$$

heltalsdelen av a

$$\frac{a^n}{n!} < C \frac{a}{n} \to 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

så

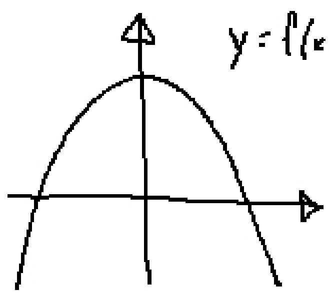
$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n} = e^{0} = 1$$

Kontinuitet

Def. f kontinuerlig i a

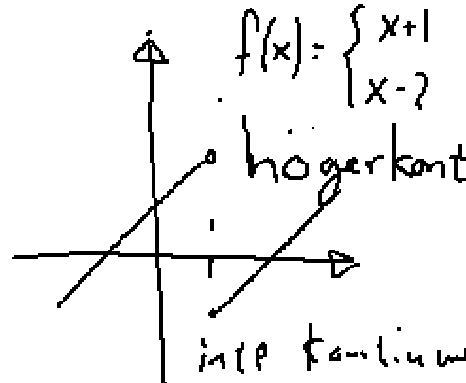
om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$y = f(x) = 2 - x^2$



kontinuerlig överallt

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$



inte kontinuerlig i $x=1$ men i övrigt

högerkontinuerlig

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

vänsterkontinuerlig

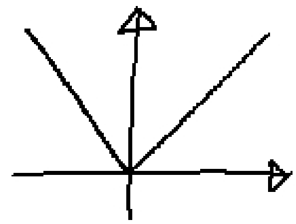
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Ex: $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1 = f(1)$ högerkontinuerlig

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$

Ex.



$f(x) = |x|$

är kontinuerlig

i $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \qquad f(0) = 0$$

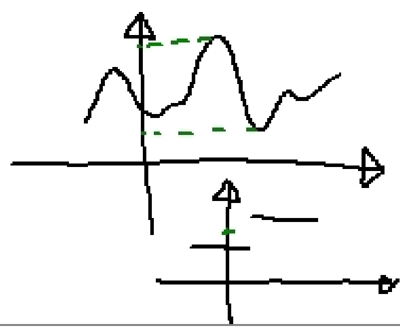
$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

Def: f sägs vara kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla punkter i definitionsområdet.

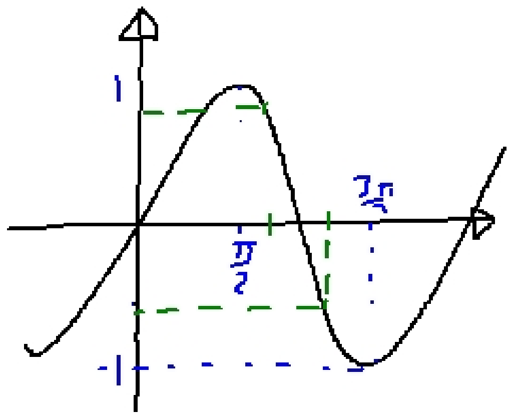
Sats: Varje elementärt uttryck definierar en kontinuerlig funktion.

Ex: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rationellt} \\ 1 & x \text{ irrationellt} \end{cases}$

Sats (om mellanliggande värden)



Ex: $\sin x$ antar värdena $-1, 1$ och därmed också alla värden mellan $-1, 1$.



Ex: Alla tredjegradsekvationer (med reella koefficienter) har minst en reell rot.

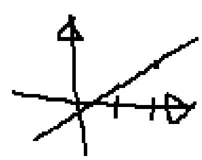
Bevis: $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, Ekvationen $p(x) = 0$. $\lim_{x \to \infty} p(x) =$

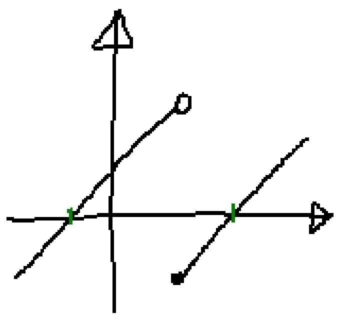
$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$$

Så för $x > 0$ x stort
måste $p(x) > 0$ och för
$x < 0$, $|x|$ stort måste $p(x) < 0$
så satsen om mellanliggande
värden säger att $p(x)$ någonstans
måste bli 0

Sats (Om extremvärden)

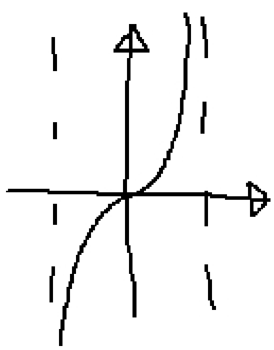
f kontinuerlig på $[a,b]$
$\Rightarrow$ antar f max och min
i intervallet





$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

På $[-2,3]$ finns minsta värdet men ej största värde



$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Om intervallet ej är slutet behöver max och min inte antas.