Lösningsförslag, Matematik 2, B och IT, 2001–12–18.

1. Vid parametervärde t har parameterkurvan $\vec{r}(t) = (t + t^3, 1 - t^2, t^2 + 3t^5)$ tangentvektor $\vec{r}'(t) = (1 + 3t^2, -2t, 2t + 15t^4)$. Punkten $(2, 0, 4)$ svarar mot parametervärdet $t = 1$ (Vi har att $1 - t^2 = 0$, så $t = \pm 1$ och det följer då från $t + t^3 = 2$ att $t = 1$.) Den sökta tangentvektorn blir därmed $\vec{r}'(1) = (4, -2, 17)$.

2. Systemet på matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1+a & b \end{array}\right).$$

Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 5 & 2a+3 \\ 0 & 0 & a-3 & b-2a \end{array}\right).$$

Systemet har således oändligt många lösningar då $a - 3 = 0$ och $b - 2a = 0$, dvs då $a = 3$ och $b = 6$. I det fallet har vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och fortsatt Gausselimination leder till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet är nu på trappstegsform och vi kan läsa av lösningarna

$$\begin{cases} x = \frac{12-9t}{7} \\ y = \frac{9-5t}{7} \\ z = t. \end{cases}$$

3. Låt $F(x, y) = 3x^2 + xy + y^2 + 2z^2 - 2xz$. Punkten $(1, 3, 2)$ ligger på nivåytan $F(x, y) = 19$. Tangentplanet i punkten $(1, 3, 2)$ har normalvektor

$$\vec{n} = \operatorname{grad} F(1, 3, 2).$$

Vi har att

$$\operatorname{grad} F = (6x + y - 2z, x + 2y, 4y - 2x),$$

så $\vec{n} = \operatorname{grad} F(1, 3, 2) = (5, 7, 6)$. Tangentplanets ekvation är nu:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r_0},$$

där $\vec{r_0} = (1, 3, 2)$ och $\vec{r}$ är en punkt på planet. Vi får följdaktligen ekvationen

$$5x + 7y + 6z = (5, 7, 6) \cdot (1, 3, 2) = 5 + 21 + 12 = 38.$$

Svar: Tangentplanet är 5x+7y+6z=38.

4. Allmänt gäller att

$$(F_x, F_y) = (F_u, F_v) \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Då $x = 2u - 3v$ och $y = 3u - 6v$ har vi att

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Vi får så

$$F_x = F_u u_x + F_v v_x = 2F_u + F_v$$

och

$$F_y = F_u u_y + F_v v_y = -F_u - \frac{2}{3} F_v.$$

Sätter vi in utvecklingarna i ekvationen får vi

$$F_x + F_y = (2 - 1)F_u + (1 - \frac{2}{3})F_v = F_u + \frac{1}{3} F_v.$$

5. Vi är givna matriserna

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observera först att A både är en ON-matris och symmetrisk, det betyder att $A = A^T = A^{-1}$. Dessutom gäller det allmänt att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ och $(BA)^T = A^T B^T$. Alltså

$$
\begin{aligned}
(AB)^{-1}(A + (BA)^T) &= B^{-1}A^{-1}(A + A^T B^T) = \\
&= B^{-1}(A^{-1}A) + B^{-1}A^{-1}(AB^T) = B^{-1} + B^{-1}B^T.
\end{aligned}
$$

Vi har att

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

och

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Det ger att

$$
\begin{aligned}
B^{-1} + B^{-1}B^T &= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 20 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -13 \\ 27 & 24 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

6. För funktionen $f(x, y) = x^2 + 4xy + cy^2 + x + 2y$ gäller att

$$f_x = 2x + 4y + 1 \qquad \text{och} \qquad f_y = 4x + 2cy + 2,$$

så $\operatorname{grad} f = (2x + 4y + 1, 4x + 2cy + 2)$. För en stationär punkt gäller att $\operatorname{grad} f = (0, 0)$, dvs i vårt fall att $2x + 4y + 1 = 0$ och $4x + 2cy + 2 = 0$. Den första ekvationen ger oss $2x = -1 - 4y$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $-2 - 8y + 2cy + 2 = 0$, dvs $(c - 4)y = 0$. Nu antog vi att $c \neq 4$ så vi får $y = 0$. Det ger sedan att $x = -\frac{1}{2}$. Punkten $(-\frac{1}{2}, 0)$ är alltså en stationär punkt för f oberoende av c. Den stationära punktens karaktär varierar däremot med c, för att se det så räknar vi ut andraderivatorna i punkten. Vi har att

$$f_{xx}(-1/2, 0) = 2,\ f_{xy}(-1/2, 0) = 4 \ \text{ och } f_{yy}(-1/2, 0) = 2c,$$

så $f_{xx}(-1/2, 0)f_{yy}(-1/2, 0) - (f_{xy}(-1/2, 0))^2 = 2 \cdot 2c - 4^2 = 4c - 16$. Vi ser att om $c < 4$ blir $4c - 16 < 0$ och vi har en sadelpunkt medan om $c > 4$ blir $4c - 16 > 0$, då även $f_{xx}(-1/2, 0) > 0$ är punkten i det fallet en lokal minpunkt.

7. Vektorerna $\{\vec{f_1} = (2,1,3), \vec{f_2} = (4,5,8), \vec{f_3} = (3,2,5)\}$ är en bas i $\mathbf{R}^3$. Vi vill hitta koordinaterna med avseende på den basen för vektorn $\vec{v}$, som i standardbasen har utseendet $\vec{v}_e = (1,1,1)$. Regeln för basbyte säger att $\vec{v}_e = C\vec{v}_f$, där C är transformationsmatrisen för basbytet, vilket betyder att C har $\vec{f}$-vektorerna som kolonnvektorer. Det återstår att lösa ekvationen. Om $\vec{v}$:s komponenter i $\vec{f}$-systemet är $\vec{v}_f = (r,s,t)$ så har vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi löser systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Systemet är nu på trappstegsform och vi kan läsa av lösningen $\vec{v}_f = (r,s,t) = (6,1,-5)$.
Ett annat sätt att få fram $\vec{v}_f$ är att flytta över C, dvs $\vec{v}_f = C^{-1}\vec{v}_e$. Vi måste alltså först räkna ut C^{-1} t ex genom att använda adjunkter

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vilket ger

$$\vec{v}_f = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

8. a) Vi ska MacLaurinutveckla funktionen

$$f(x,y) = e^{2x+y} - 2\sin x - \sin y - \cos(x-2y)$$

till ordning 2. Vi kan använda kända envariabelutvecklingar

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3),$$

$$\sin t = t + O(t^3),$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

Sätt $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \\ 1 + (2x+y) + \frac{(2x+y)^2}{2} - 2x - y - \left(1 - \frac{(x-2y)^2}{2}\right) + O(\rho^3) &= \\ &= \frac{(2x+y)^2}{2} - \frac{(x-2y)^2}{2} + O(\rho^3) = \\ &= \frac{1}{2}(4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2) + O(\rho^3) = \\ &= \frac{5}{2}(x^2 + y^2) + O(\rho^3). \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{5}{2} + O(\rho) = \frac{5}{2}.$$

9. Vi börjar med att skriva den kvadratiska formen

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$$

på matrisform

$$f(x,y) = (x,y)K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diagonalisering av K sker med hjälp av egenvärden. K kan ON-diagonaliseras eftersom K är symmetrisk.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - (-1)^2(1-\lambda) - (-1)^2(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda),$$

så vi får egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$(ordningen godtycklig). Med nya variabler ξ, η och ζ blir alltså ekvationen: $\xi^2 + 3\eta^2 = 8$.

10. a) $n+1$ stycken vektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1}$ i $\mathbf{R}^n$ är linjärt beroende om och endast om det linjära homogena systemet

$$x_1\vec{v}_1 + \ldots + x_{n+1}\vec{v}_{n+1} = \vec{0}$$

har icke-triviala lösningar. Men detta system är liggande (fler variabler än rader) och har enligt sats 1.3[1], sid 24 i Linjär geometri och algebra, alltid icke-triviala lösningar.

b) För att $n-1$ stycken vektorer $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_{n-1}$ i $\mathbf{R}^n$ ska spänna upp hela $\mathbf{R}^n$ måste varje system av typen

$$x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} = \vec{a}$$

ha en lösning. Men detta system är stående (fler rader än variabler) och stående system med allmänt högerled saknar, enligt sats 1.3[2] i Linjär geometri och algebra, lösningar.

(Anm. sats 1.3 följer direkt av Gauss-Jordans lösningsalgoritm.)

Alternativuppgifter

2*

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-2}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\arctan\sqrt{3} - \arctan 0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

7*

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{bmatrix} = \int_0^\infty te^{-t}\frac{dt}{2} = \left[-\frac{t}{2}e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\frac{1}{2})e^{-t}dt =$$

$$\left[-\frac{t}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^\infty = \lim_{t\mapsto\infty}\left(-\frac{t+1}{2}e^{-t}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$