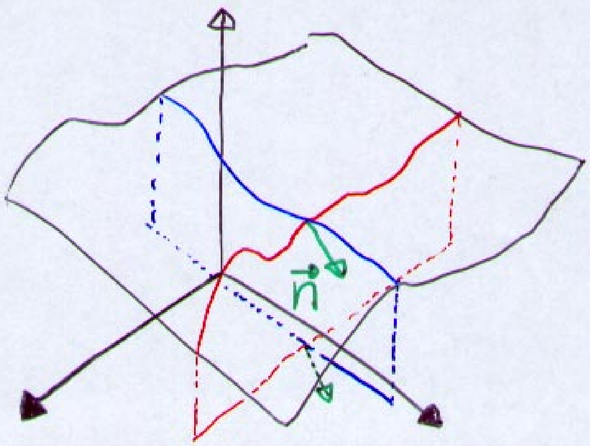


$$\boxed{f'_{\vec{n}}(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}}$$

$$\vec{g}(t) = \vec{x} + t\vec{n}$$

$$F(t) = f(\vec{g}(t))$$

$$\vec{g}\,'(t) = \vec{n}$$

$$F'(0) = \operatorname{grad} f(\vec{g}(0)) \cdot \vec{g}\,'(t)$$

$$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}$$

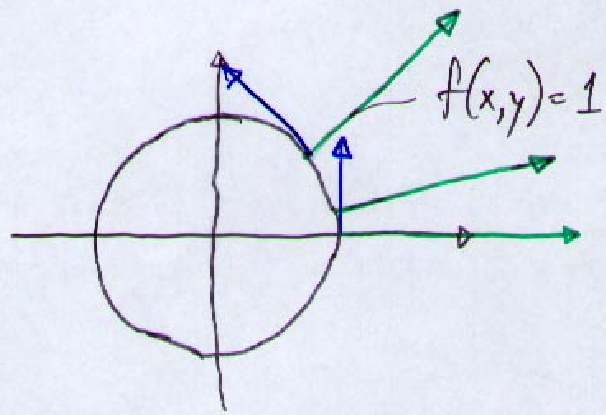
②

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{g}(t)) - f(\vec{g}(0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{n}) - f(\vec{x})}{t} = f'_{\vec{n}}(\vec{x}).$$

Exempel:



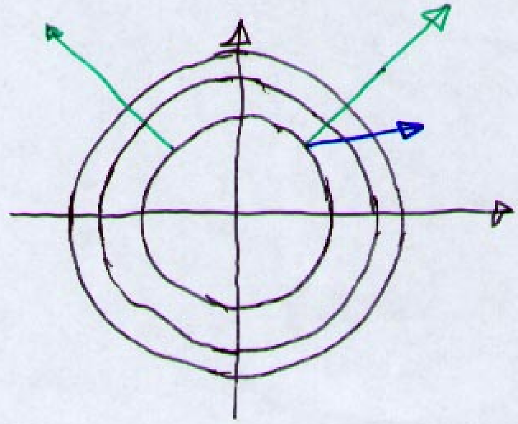
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad \vec{g}(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{grad} f(a,b) = (2a, 2b) = 2(a,b)$$

$$\vec{g}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

③



Störst förändring i gradientens riktning.

Specialfall:

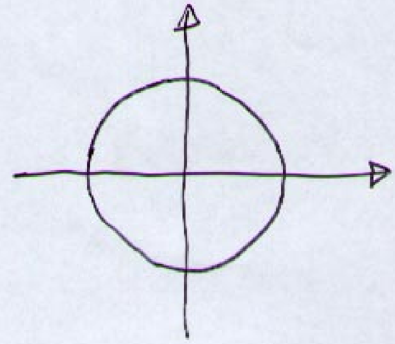
$\vec{n} = (1,0)$: $\quad \operatorname{grad} f \cdot \vec{n} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$\vec{n} = (0,1)$: $\quad \operatorname{grad} f \cdot \vec{n} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t(1,0)) - f(\vec{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t}$$

Kurvor i planet

Exempel:



$$\vec{f}_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\vec{f}_2(t) = (\cos t^3, \sin t^3) \quad [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}] \to \mathbb{R}^2$$

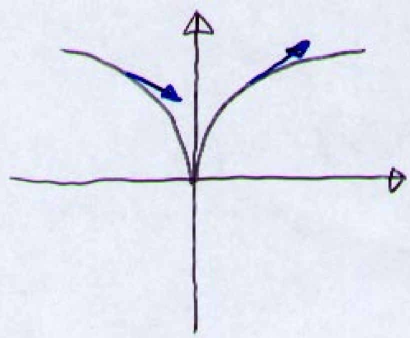
$$\vec{f}_1'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$$

reguljär kurva

$$\vec{f}_2'(t) = (-3t^2 \sin t^3, 3t^2 \cos t^3)$$

$$\vec{f}_2'(0) = (0,0) \quad \text{singulär}$$

Exempel: $\vec{f}(t) = (t^3, t^2)$ (5)



$\vec{f}'(t) = (3t^2, 2t)$

$\vec{f}'(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(-3t^2\sin t^3, 3t^2\cos t^3)}{\sqrt{(-3t^2\sin t^3)^2+(3t^2\cos t^3)^2}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(-\sin t^3, \cos t^3)}{\sqrt{9t^4}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} (-\sin t^3, \cos t^3) = (0,1) \neq (0,0)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(3t^2, 2t)}{\sqrt{9t^4+4t^2}} = \begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{(3t,2)}{\sqrt{9t^2+4}} & t > 0 \\ \lim_{t\to 0} -\frac{(3t,2)}{\sqrt{9t^2+4}} & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (0,1) \\ (0,-1). \end{cases}$$

6

En kurva som är reguljär utom i ett ändligt antal punkter kallas **styckvis reguljär**.

Exempel: $(\sin t^3, \sin^2 t)$

Sats 6.1: Grafen till en kontinuerligt deriverbar funktion är en reguljär kurva.

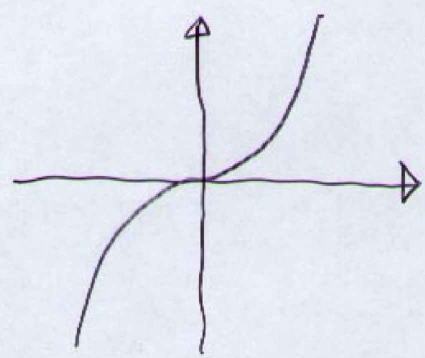
Grafen ges som $y=f(x)$,

dvs punkter $(x, f(x))$.

Om $\vec{r}(x) = (x, f(x))$ så

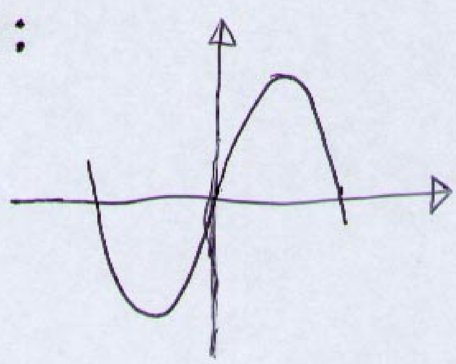
blir $\vec{r}\,'(x) = (1, f'(x)) \neq (0,0)$.

Exempel:



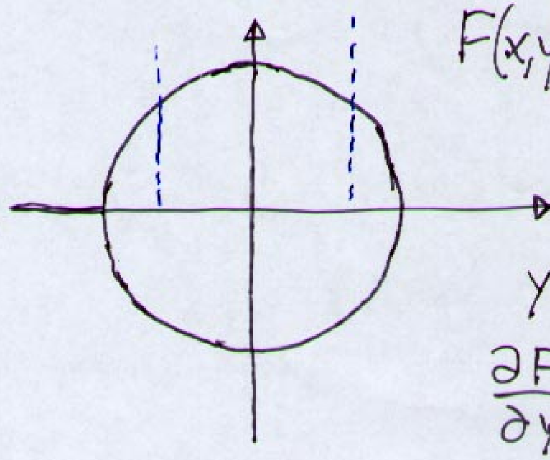
$y = x^3$

Exempel:



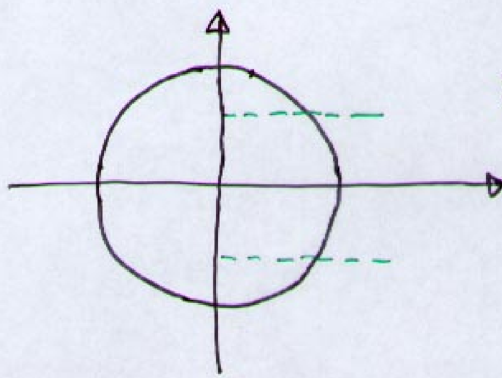
$y = \sin x$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



$y = \sqrt{1-x^2}$

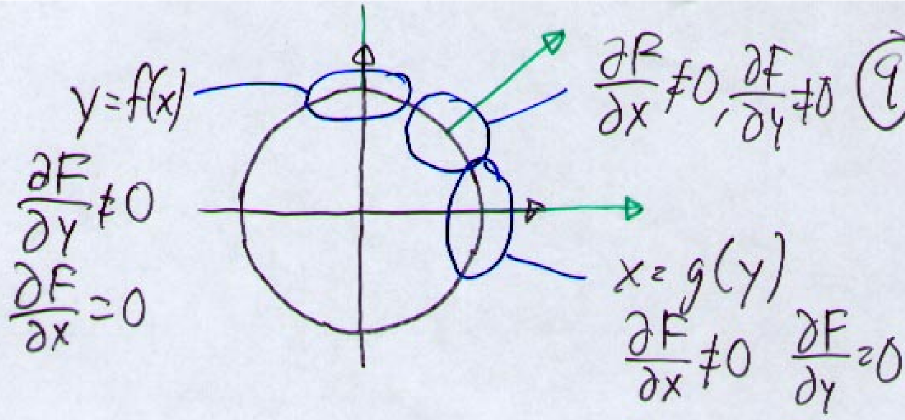
$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$



$x = \sqrt{1-y^2}$

$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$

Sats 6.2: Om $\operatorname{grad} F(a,b) \neq (0,0)$ så ger $F(x,y) = F(a,b)$ en reguljär kurva nära (a,b).



$$F(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad F(x,y)=0$$

$$G(x,y) = x^2+y^2 \qquad G(x,y)=1$$

Sats 6,3: Om $\text{grad}\, F(a,b) \neq (0,0)$ för en punkt (a,b) på nivåkurvan $F(x,y)=C$ så är $\text{grad}\, F(a,b)$ normalvektor till kurvan.

Bevis: Nära punkten ges kurvan av en funktion $\vec{r}(t)$, där t varierar i ett intervall I. Vi har

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(0)&=(a,b)\\ \vec{r}\,'(0)&\neq(0,0)\end{aligned}}$$

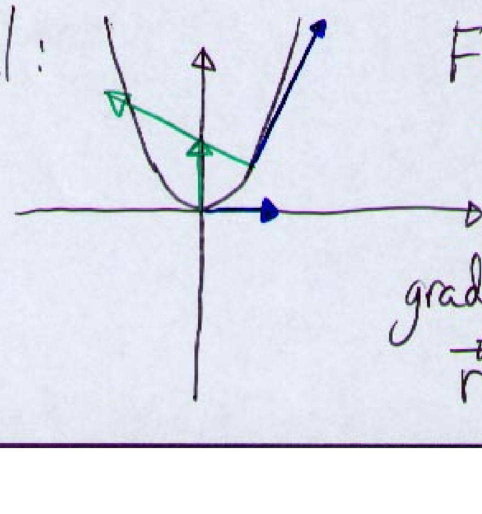
$$F(\vec{r}(t))=C$$

$$0=\frac{d}{dt}F(\vec{r}(t))=\operatorname{grad}F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)$$

Speciellt gäller

$$\operatorname{grad}F(a,b)\cdot\vec{r}\,'(0)=0.$$

Exempel:



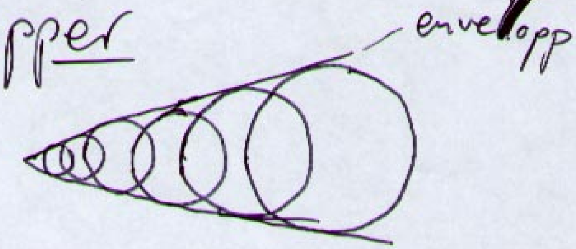
$$F(x,y)=y-x^2$$

$$\vec{r}(t)=(t,t^2)$$

$$\operatorname{grad}F(x,y)=(-2x,1)$$

$$\vec{r}\,'(t)=(1,2t)$$

Envelopper



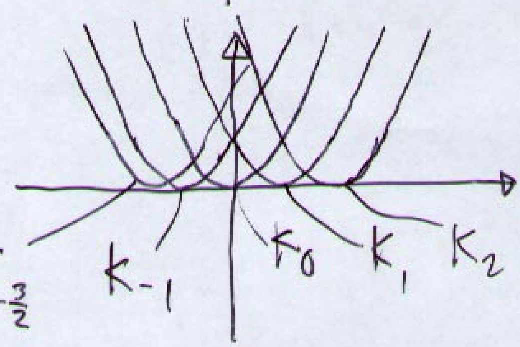
Definition 6.3:

skara

Låt $\mathbb{K}_C$ vara en familj av regulära kurvor. Om E är en regulär kurva som tangerar samtliga kurvor i skaran och i varje punkt tangerar någon av kurvorna i skaran så sägs E vara en envelopp till kurvskaran.

Exempel: Låt $K_C : F(x,y,C)=0$ (12)

där $F(x,y,C) = y-(x-C)^2$



Linjen $y=0$ är envelopp till K_C. Envelopen kan beskrivas som $\vec{r}(C) = (x(C), y(C))$, den punkt där envelopen tangerar K_C. I exemplet $\vec{r}(C) = (C, 0)$.

13

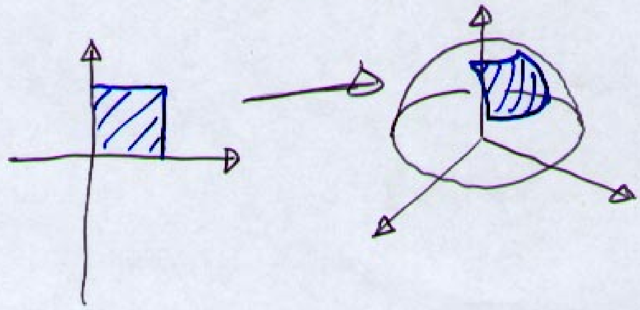
$$\frac{\partial F}{\partial C}=\frac{\partial}{\partial C}\left(y-(x-C)^2\right)=$$

$$=+2\,(x-C)$$

$$\begin{cases} F(x(C),y(C),C)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial C}(x(C),y(C),C)=0 \end{cases}$$

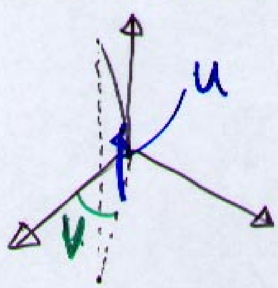
Den

Ytor



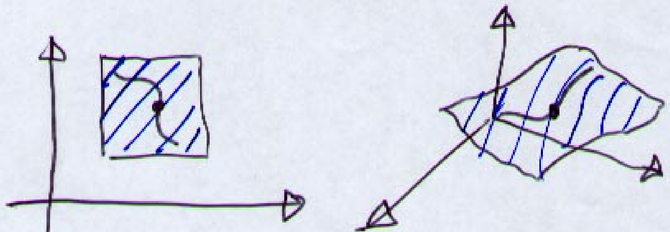
Enhetssfären:

$$x = \cos u \,\cancel{\sin v}\, \cos v$$
$$y = \cos u \sin v$$
$$z = \sin u$$



$$\vec{r} : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$$

Vi vill säga att ett ytstycke är regulärt om det har en normal $\neq 0$.



$\vec{w}(t)$ $\qquad\qquad$ $\vec{R}(t) = \vec{r}(\vec{w}(t))$

$$\vec{R}'(t) = J_{\vec{r}}(\vec{w}(t))\,\vec{w}'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \vec{w}'(t)$$

$\Rightarrow$ tangentvektorn ligger i planet spänt av $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Om $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$

blir det en normalvektor.

Definition 6.4: (16)

Ett ytstycke är regulärt om $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$.

Planet med normalvektor $\vec{n}$ kallas **tangentplanet** till ytan i punkten.

Exempel: Sfären ges av

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \cos v \\ z = \sin v \end{cases} \qquad \vec{r}(u,v) = (x,y,z)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\sin v \cos u, -\sin u \sin v, \cos v)$$

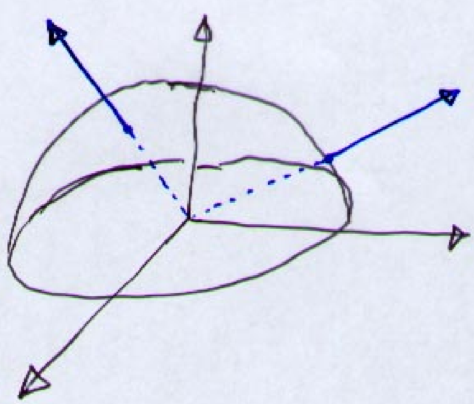
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\begin{vmatrix} \cos u \cos v & 0 \\ -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix} , \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & 0 \\ -\sin v \cos u & \cos v \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & \cos u \cos v \\ -\sin v \cos u & -\sin u \sin v \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\cos u \cos^2 v , +\sin u \cos^2 v , \sin v \cos v \right)$$

$$= \cos v \left(\cos u \cos v , \sin u \cos v , \sin v \right)$$

$$= \cos v \cdot \vec{r}(u,v).$$



Sats 6.5: Om f har kontinuerliga partiella derivator så är grafen till f, $z=f(x,y)$ regulär. (18)

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)$$

Sats 6.6: Om $F(x,y,z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten (a,b,c)

$$F(a,b,c) = C \;, \quad \text{grad}\, F(a,b,c) \neq (0,0,0)$$

så är

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\; F(x,y,z) = C\}$$

ett regulärt ytstycke kring (a,b,c).

Exempel: Enhetssfären kan definieras som $F(x,y,z) = 1$ där $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Sats 6.7: Om $\text{grad}\,F \neq \vec{0}$ i en punkt (a,b,c) på en nivåyta $F(x,y,z) = C$ så är $\text{grad}\,F$ en normalvektor till ytan i den punkten.

20

Exempel: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{grad}\,F = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$$