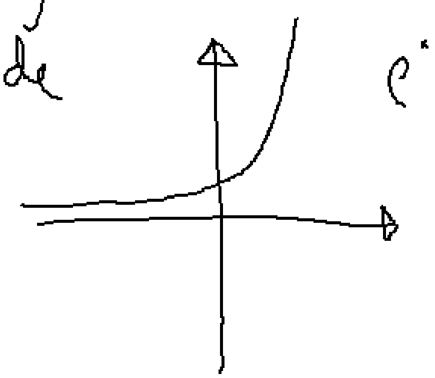
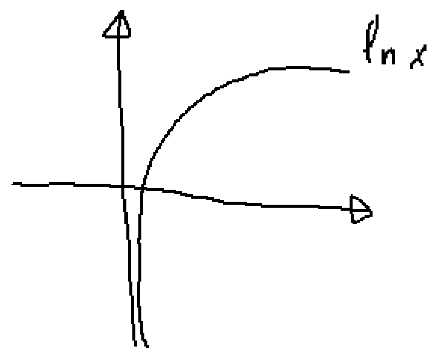
Inversa funktioner

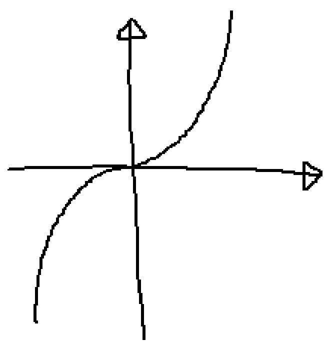
$$f(x)=x^2\,,\quad x>0\,,\quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

$$f(x)=e^x \qquad f^{-1}(x)=\ln x$$

Strängt växande







$y = x^3$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

är inverterbar
men ej strängt växande

$$\frac{dy(0)}{dx} = 3 \cdot 0^2 = 0$$

Sats: En deriverbar funktion av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definierad på ett intervall, har en deriverbar invers or och endast om $f'(x) \neq 0$ i intervallet.

$f^{-1}(x)$ ej deriverbar när $x = 0$.

$$\boxed{f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1}$$

$$T: \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases} \qquad T^{-1}: \begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+y) \\ v = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$$

En linjär avbildning från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\vec{y} = A\vec{x}$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_f &= A \\ J_{f^{-1}} &= A^{-1} = (J_f)^{-1} \end{aligned}}$$

Om A är inverterbar

$\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

En linjär funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$

f av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator. Nästan linjär

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \sim \vec{f}(\vec{a}) + J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

$$\vec{y} - \vec{f}(\vec{a}) \sim J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

$$\vec{x} - \vec{a} \sim \left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right)^{-1}\left(\vec{y} - \vec{f}(\vec{a})\right)$$

Sätt $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$

$$\vec{x} - f^{-1}(\vec{b}) \sim \underbrace{\left(J_{\vec{f}}\left(\vec{f}^{-1}(\vec{b})\right)\right)^{-1}}_{J_{\vec{f}^{-1}}(\vec{b})}(\vec{y} - \vec{b})$$

f inverterbar om och <u>endast</u> om det $J_f \neq 0$.

Exempel: $f(x,y) = (\underbrace{x^2-y^2}_{f_1}, \underbrace{2xy}_{f_2})$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\det J_f = 2x \cdot 2x - 2y(-2y)$$
$$= 4(x^2+y^2) \neq 0 \text{ om}$$

$(x,y) \neq (0,0)$. Funktionen är inverterbar utanför origo.

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -z \end{cases}$$

x, y blir funktioner av z.

$$F(z, x, y) = (2x + y + 5z - 2,\ x - y + z - 1)$$

$$\{(x,y,z);\ F(z,x,y) = (0,0)\} \qquad F: \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ \qquad\quad z = z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Matrisen är så inverterbar och vi kan lösa ut x, y, z som funktioner av elementen i högerledet, dvs som funktioner av z.

$$\vec F(\vec x, \vec y) = \vec 0 \qquad \vec F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$$

vill lösa ut $\vec y$ som funktion av $\vec x$. Vi säger då att ekvationen definierar funktionen $\vec y = \vec f(\vec x)$ implicit. $\vec f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} \vec u \\ \vec v \end{pmatrix} = \vec G(\vec x, \vec y) = \begin{pmatrix} \vec x \\ \vec F(\vec x, \vec y) \end{pmatrix}$$

$$\vec G : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$$

Om $\det J_{\vec G} \neq 0$ finns invers

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \vec{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

Om inverterbar har vi

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = (\vec{G})^{-1}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{g}(\vec{u}, \vec{v}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = (\vec{G})^{-1}(\vec{u}, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{g}(\vec{u}, \vec{0}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{u} \\ \vec{y} = \vec{g}(\vec{u}, 0) = \vec{f}(\vec{x}) \end{cases}$$

När är det $J_{\vec{G}} \neq 0$?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$J_{\vec{G}} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} E_m & 0 \\ \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} & \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}n \\ \}n \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}}}_{n}\ \underbrace{\hphantom{\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}}}_{n} & \end{array}$$

Jacobi-matrisen för $\vec{F}$ när vi betraktar $\vec{x}$-variablerna som fixa.

$$\det J_{\vec{G}} = \det \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$$

Villkor för att vi ska kunna lösa ut $\vec{y}$ som funktion av $\vec{x}$ blir så $\det \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \neq 0$

$$\text{Exempel: } \vec{F}(\overset{\vec{x}}{z}, \overbrace{x,y}^{\vec{y}}) = (x\cos y + y\cos z + z\cos x,\; x\cos z - y\cos x + z\cos y)$$

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Vi vill lösa ut x, y som funktioner av z nära $(0,0,0)$.

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = (\cos y - z\sin x,\; \cos z + y\sin x)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = (-x\sin y + \cos z,\; -\cos x - z\sin y),$$

$$\begin{vmatrix} \cos y - z\sin x & -x\sin y + \cos z \\ \cos z + y\sin x & -\cos x - z\sin y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Det finns funktioner f, g så att $x = f(z)$, $y = g(z)$ nära $(0,0,0)$.

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$$

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$$

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}}}_{E} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \cdot J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad J_{\vec{f}}(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}$$

i Exemplul

$$\begin{pmatrix} f'(0) \\ g'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1} \qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}$$

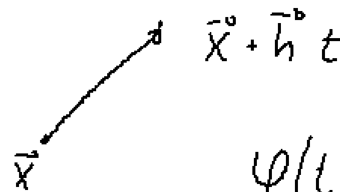
Taylors formel:

$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}}_{R_{n+1}(h)}$$

$\xi \in (x, x+h)$

Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentierbar

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + R(\vec{x}, \vec{h})\,|\vec{h}|$$



$$\varphi(t) = f(\vec{x} + t\vec{h})$$

Taylor utveckling av φ kring $t = 0$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, t + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} t^{n+1} \qquad 0 < \tau < t$$

$$f(\vec{x} + t\vec{h}) = f(\vec{x}) + \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{h})\Big|_{t=0} t + \ldots$$

$t = 1$:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + f'_{\vec{h}}(\vec{x})\, |\vec{h}| + \ldots$$

Om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

grad $f \cdot \vec{h}$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\tau h, y+\tau k)$$

Mer explicit $\qquad 0<\tau<1.$

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) +$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} h^m k^{n-m} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} h^m k^{n+1-m} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}} f(x+\tau h, y+\tau k)$$

$$f(x+h, y+k) = p_n(h,k) + O\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^{n+1}\right)$$

$$p_n(h,k) = f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h^m k^{n-m} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} f(x,y)$$

Om vi kan skriva

$$f(x+h, y+k) = p(h,k) + O\left(|(h,k)|^{n+1}\right)$$

högst grad n

Så är det Taylor utvecklingen av ordning n. Dvs $p(h,k) = p_n(h,k)$

e^{x+y} utveckla till grad 2 kring punkten $(1,0)$.

$$\begin{cases} x = 1+h \\ y = k \end{cases}$$

$$e^{1+h+k} = e\,e^{h+k} =$$

$$= e\left(1 + (h+k) + \frac{(h+k)^2}{2!} + O(3)\right)$$

$$= e\left(1 + h + k + \frac{h^2}{2!} + hk + \frac{k^2}{2!}\right) + O(3)$$

$$\frac{\partial^2 e^{x+y}}{\partial x \partial y}(1,0) = e$$