Exempel: Bestäm max och min för funktionen $f(x,y) = x^2+y^2-3x+y$ i området $\{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 4\}$

– Stationära punkter i det inre av området

$$\text{grad}\, f(x,y) = (2x-3,\ 2y+1)$$

$$\text{grad}\, f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

– Kolla randen

(Vi kan använda Lagranges
multiplikatormetod)

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

Randen blir $g(x,y) = 0$.

$\text{grad} f \parallel \text{grad}\, g$ i extrempunkt

$$\text{grad} f(x,y) = (2x-3, 2y+1)$$

$$\text{grad}\, g(x,y) = (2x, 2y)$$

$$(2x-3, 2y+1) = \lambda (2x, 2y)$$

$$(1-\lambda)(2x, 2y) = (3, -1) \quad \Rightarrow \quad x = -3y$$

$$x = -3y$$

$$g(x,y) = 0$$

$$(-3y)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$10y^2 = 4 \qquad y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}} \qquad x = \mp\frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$f\left(\frac{-6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{36}{10} + \frac{4}{10} + \frac{18}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = 4 + 2\sqrt{10} \quad \text{max}$$

$$f\left(\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = 4 - \frac{18}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{10}} = 4 - 2\sqrt{10}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \text{min}$$

– Eventuella grad $g = 0$

$$\text{grad}\, g(x,y) = (2x, 2y)$$

$\neq 0$ på randen

Minsta kvadrat metoden

$y = kx + l$

$(0,0), (1,1), (2,1)$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0 = k0 + l$

$1 = k1 + l$

$1 = 2k + l$

$$F(\vec{x}) = |A\vec{x} - b|^2$$

Vi vill minimera F.

$$F(x) = |A\vec{x}-\vec{b}|^2 = (A\vec{x}-\vec{b})^T(A\vec{x}-\vec{b})$$

$$0 = \text{grad}\, F(\vec{x}) = A^T(A\vec{x}-\vec{b}) + (A\vec{x}-\vec{b})^T A$$

$$A^T(A\vec{x}-\vec{b}) = 0 \quad \text{(normal ekvation)}$$

"andra derivatan" av F $= A^T A$

min $\quad \vec{x}^T A^T A \vec{x} \geq 0$

$$\Leftarrow \quad (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = |A\vec{x}|^2 \geq 0$$

$$|A\vec{x}|^2 = 0 \iff A\vec{x} = \vec{0}$$

unik min punkt $\Leftarrow$ $\quad \vec{x} = \vec{0}$ precis då kolonnvektorerna är linjärt oberoende.

$$A^T A \vec{x}_0 = A^T \vec{b}$$

Om $(A^T A)$ är inverterbar har vi

$$\vec{x}_0 = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

Exempel: Bestäm ekvationen för den räta linje $y = kx + l$ som i minstakvadrat-mening bäst anpassar till punkterna $(0,0), (1,2), (3,1)$ och $(5,3)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \vec{X}_0 = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 26 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$y = kx + l = \frac{26}{59} x + \frac{30}{59}$$

Vektorerna $\{\vec{f}_1 = (1,2), \vec{f}_2 = (2,-1)\}$ bildar en bas i $\mathbb{R}^2$ bestäm koordinaterna för vektorn $(5,3)$ med avseende på basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

$\boxed{X_s = C X_f}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det C = -1 - 4 = -5$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Låt $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ vara som tidigare och betrakta den linjära avbildningen som i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ har matris $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vad har avbildningen för matris i standardbasen?

$$(X_e = \underline{\underline{C}} X_f) \qquad A_e = \underline{\underline{C}} A_f C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_f = \underline{\underline{C}}^{-1} X_e \qquad A_f = \underline{\underline{C}}^{-1} A_e C$$

Transformera ekvationen

$$2xy + 2x + 2y = 0$$

till huvudaxelform.

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$$

Kvadrattermen blir

$$\xi^2 - \eta^2$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_e^{\,T} \mathbb{K} \vec{x}_e = (C\vec{x}_f)^T \mathbb{K} (C\vec{x}_f)$$
$$= \vec{x}_f^{\,T} (C^T \mathbb{K} C) \vec{x}_f$$

$$C^{-1} \mathbb{K} C$$

$\Rightarrow$ vi måste ha $C^T = C^{-1}$

dvs C ska vara ON-matris.

$$\xi^2 - \eta^2 + 2(1,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi^2 - \eta^2 + 2(\sqrt{2}, 0)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}\,\xi = 0$$

$$(\xi + \sqrt{2})^2 - 2 - \eta^2 = 0$$

$$(\xi')^2 - \eta^2 = 2$$

$$\left(\frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

hyperbel.

Jacobi matriser

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $\quad J_{\vec{r}} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

tangentvektorn till kurvan

$\vec{r}(t) = (t^3 - t^2, t^2, t^2)$

tangentvektorn i punkten $(0,1,1)$

$\vec{r}\,'(t) = (3t^2 - 2t, 2t, 2t)$

$t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$ $\quad \vec{r}\,'(1) = (1, 2, 2)$

$t^3 - t^2 = 0 \Rightarrow t = 1$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) \quad J_f$: grad f

grad f är normal till nivåytan

$f(x,y,z) = C$.

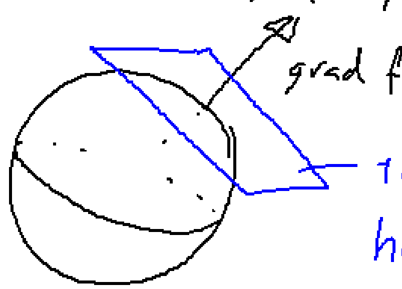
Ex: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

grad $f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

grad $f(1,0,0)$
$= (2,0,0)$

$2x = C$

$2 \cdot 1 = C$



tangent planet har också grad f som normal.

Visa att det i en omgivning av punkten $(0,0)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ med kontinuerliga derivator, sådan att

$$F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x = 0$$

Bestäm också $\operatorname{grad} z(0,0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0) = -y\sin z + \cos x \Big|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}\left(x,y,z(x,y)\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \cos y - y \sin z \, z'_x +$$

$$+ z'_x \cos x - z \sin x \Big|_{(0,0)}$$

$$= 1 + z'_x(0,0)$$

$$\Rightarrow z'_x(0,0) = -1$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -x \sin y + \cos z - y \sin z \, z'_y$$

$$+ z'_y \cos x \Big|_{(0,0,0)} = 1 + z'_y(0,0)$$

$$\operatorname{grad} z(0,0) = (-1,-1).$$

Transformera ekv $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

med hjälp av variabelbytet

$$\begin{cases} x = 4u + 3v \\ y = 3u - 4v \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{25}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{3}{25}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{3}{25}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{4}{25}\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{12}{625}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{7}{625}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{12}{625}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+O(6)}{x^2+y^2}$$

$$= 1.$$

MacLaurinutveckla $f(x,y) = 1-\cos(x+y)$ till andra ordningens termer.

$$1-\cos(x+y) = 1-\left(1-\frac{(x+y)^2}{2!}+O(4)\right)$$

$$= \frac{(x+y)^2}{2!}+O(4) = \frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}+O(4)$$

Vi kan läsa av f's derivator i origo

t.ex $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

509: Som synes är $(x,y)=(0,0)$ en lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x+xy+e^y=2 \\ x^3-x+y+y^3=0. \end{cases}$$

Visa att i en tillräckligt liten omgivning av $(0,0)$ finns det inte någon annan lösning.

$$F(x,y)=\Big(\overbrace{e^x+xy+e^y}^{f_1},\ \overbrace{x^3-x+y+y^3}^{f_2}\Big)$$

Vi vill visa att $\det J_F(0,0)\neq 0$.

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(0,0) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x + y & x + e^y \\ 3x^2 - 1 & 3y^2 + 1 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_F(0,0) = 2 \neq 0.$$

$(-1, 4, 1) + t(2, 0, 3)$

3.17 $(1, 7, -1) + t(3, 0, 2)$

Linjens riktningsvektor ska vara $\perp$ mot bägge linjernas riktningsvektorer. En sådan vektor fås genom kryssprodukten $(2, 0, 3) \times (3, 0, 2)$