Definition 5.1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kallas en matris med m rader och n kolonner, en $m \times n$-matris. Matrisens format är då $m \times n$. Om $m = n$ är matrisen kvadratisk.

Matriser av format $m \times 1$, dvs sådana med formen $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, kallas också kolonnvektorer.

Matriser av format $1 \times n$, dvs sådana med formen $(a_1, \ldots, a_n)$, kallas även radvektorer.

Definition 5.2 (Transponering)

Om raderna i matrisen B är identiska med kolonnerna i matrisen A så sägs B vara A:s transponat, $B = A^T$.

Om $A = A^T$ sägs A vara symmetrisk.

Exempel: Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ så är $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Om a är en kolonnvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så är a^T radvektorn $(1\ 0\ 1)$.

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ så är $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

dvs $A = A^T$ är symmetrisk.

Om A har format $m \times n$ kommer A^T ha format $n \times m$. Vi ser också från definitionen att $(A^T)^T = A$.

Definition 5.3 Om A och B är två matriser med samma format så är summan, $A+B$, den matris vars element är summan av de i resp. matris.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B = B+A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

Matrisen vars element alla är 0 kallas nollmatrisen och betecknas $\mathbb{O}$.

$$A+\mathbb{O} = \mathbb{O}+A = A$$

Definition 5.4: (multiplikation med skalär)

$$k\cdot A = k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k\cdot(A+B) = kA + k\cdot B$$

$$(k+l)\cdot A = k\cdot A + l\cdot A$$

$$0\cdot A = \mathbb{O}$$

$$(k\cdot A)^T = k\cdot A^T$$

Definition 5.5: (Matrismultiplikation)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Exempel:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 17 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

Låt $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med etta på plats k, resten nollor.

$$A e_k = k\text{:te kolonnen i } A$$
$$e_l^T A = l\text{:te raden i } A.$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Enhetsmatris}$$

$A_{m \times n}$, $\quad AE_n = A \quad , E_m A = A.$

Matrismultiplikationen är icke-kommutativ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Den behöver inte ens vara definierad åt bägge håll. $(2\times3)\cdot(3\times3) \quad (2\times3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 17 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

men $\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}$

$(3\times3)\cdot(2\times3)$

$$k\cdot(AB) = (k\cdot A)B = A(k\cdot B)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = (AB)+(AC)$$

$$(A+B)C = (AC)+(BC)$$

$$AO = OA = O$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

(62)

Exempel: $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} = 3\cdot 9 + 5\cdot 7 = 62$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\ 22\end{pmatrix} = 1\cdot 18 + 2\cdot 22 = 62$$

Exempel: $\left((1\ 2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^T (1\ 2)^T$

$$\left((1\ 2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\right)^T = (9\ 7)^T = \begin{pmatrix}9\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^T (1\ 2)^T = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ 7\end{pmatrix}$$

Associativa lagen: $(AB)C = A(BC)$

$$D = (AB) = \begin{pmatrix}d_{11} & \cdots & d_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ d_{m1} & \cdots & d_{mk}\end{pmatrix} \qquad d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

$$DC = \begin{pmatrix}e_{11} & \cdots & e_{1\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ e_{m1} & \cdots & e_{m\ell}\end{pmatrix} \qquad e_{ij} = \sum_{t=1}^{k} d_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st}c_{tj}$$

$$F = BC = \begin{pmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{n\ell}\end{pmatrix} \qquad f_{ij} = \sum_{r=1}^{k} b_{ir}c_{rj}$$

$$AF = \begin{pmatrix}g_{11} & \cdots & g_{1\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{m\ell}\end{pmatrix} \qquad g_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}f_{pj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\sum_{r=1}^{k} b_{pr}c_{rj}$$

Bevis av identiteten $(AB)^T = B^T A^T$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{m1} \\ \vdots & & \\ c_{1k} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \\ d_{k1} & \cdots & d_{km} \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{jt} b_{ti}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{km} \end{pmatrix}$$

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} a_{js} = d_{ij}.$$

För kvadratiska matriser kan man ta potenser

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{nm} = (A^m)^n$$

$$A^0 = E$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Låt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

Går även bra för simultana system

$$A\mathbb{x}_1 = \mathbb{b}_1, \quad A\mathbb{x}_2 = \mathbb{b}_2 \ \dots \ A\mathbb{x}_k = \mathbb{b}_k$$

Sätt $X = (\mathbb{x}_1 \ \mathbb{x}_2 \dots \mathbb{x}_k)$, $B = (\mathbb{b}_1 \ \mathbb{b}_2 \dots \mathbb{b}_k)$

$$AX = B$$

Exempel:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cancel{x_{13}} \\ x_{21} & x_{22} & \cancel{x_{23}} \\ x_{31} & x_{32} & \cancel{x_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 9 & 37 \end{pmatrix}$$

Op 1: $-2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Op 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Op 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sats 5.2

Op1: Att göra bytet rad i → rad i + k·rad j på en matris A är detsamma som att multiplicera

$$RA$$

där $R = E + kM$ och M har en etta i pos (i,j), nollor för övrigt. Vi kan gå tillbaka med $R^{-1} = E - kM$, dvs

$$R^{-1}R = RR^{-1} = E.$$

Op2: Radoperationen rad i → k·rad i svarar mot multiplikation med

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{k} & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}Q = QQ^{-1} = E$$

Op 3: Radoperationen "byta plats på två rader" svarar mot multiplikation med matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P \,, \quad P^2 = E.$$

Exempel: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 13 \\ 4x_1 - 2x_2 = 10 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \quad \text{Op 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Op2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Op 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats 5.3 För varje matris A finns ett antal elementära matriser med produkt U så att UA är på trappstegsform.

Sats 5.4: Om U är en produkt av elementära matriser så finns en matris U^{-1} sådan att

$$U^{-1}U = UU^{-1} = E.$$

Exempel:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 5.6:

Om två matriser, A, B, uppfyller relationen

$$AB = E$$

säger man att B är högerinvers till A och att A är vänsterinvers till B.

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats 5.6: Om en matris har både höger- och vänsterinvers så är de lika.

$$H = EH = (VA)H = V(AH) = VE = V$$

Definition 5.7: Om det till matrisen A finns en matris B sådan att

$$AB = BA = E$$

så är B inversen till A och man skriver $B = A^{-1}$. Matrisen A sägs då vara inverterbar.

Sats 5.7: Alla inverterbara matriser är kvadratiska och varje kvadratisk matris som har en högerinvers (eller vänsterinvers) är inverterbar.

Satsen medför att endast kvadratiska matriser kan vara inverterbara och dessa är inverterbara om och endast om $AX = E$ har en lösning.

$$XA = E \iff (XA)^T = A^T X^T = E$$

$$A^T Y = E$$

Exempel: Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ om den finns.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Sats 5.8</u>: Matrisen A är inverterbar om och endast om ekvationen

$$Ax = b$$

har precis en lösning för godtyckligt högerled b.

<u>Sats 5.9</u>: En kvadratisk matris är inverterbar om och endast om ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

bara har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & -6+6 \\ 2-2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats 5.10

- Om A är inverterbar så är A^{-1} inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
- $$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$
- $$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
- Om AB är inverterbar och A eller B kvadratisk, så är A och B inverterbara.
- $$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

$$E = (AB)(AB)^{-1} = A\left(B(AB)^{-1}\right)$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_{E})A^{-1} = AA^{-1} = E$$