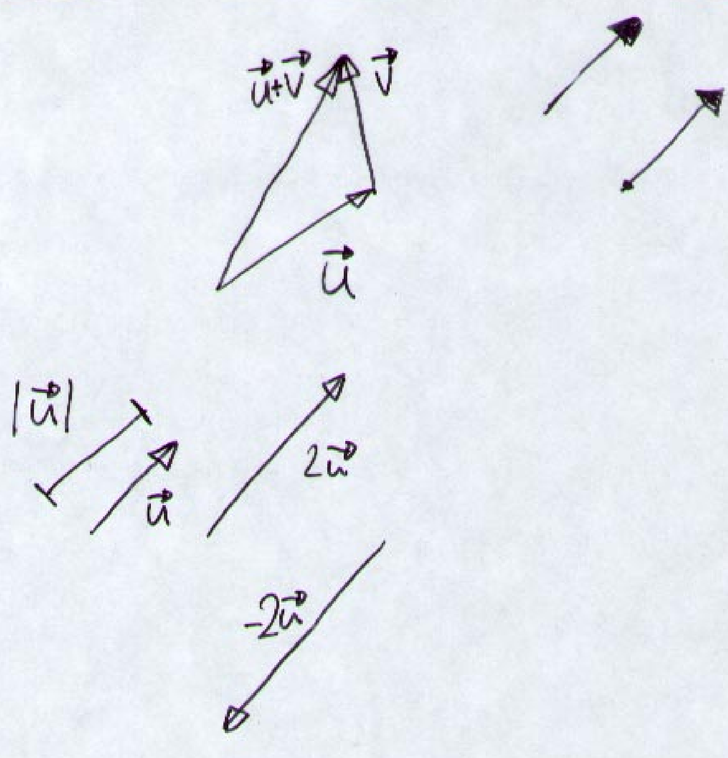
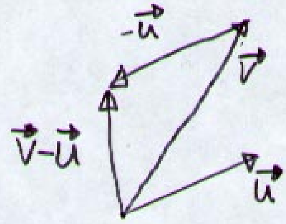
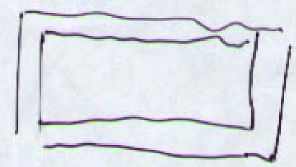
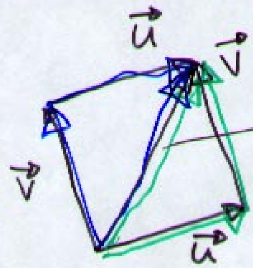
Definition 2.1: En vektor är mängden av alla lika långa och lika riktade pilar. Den representeras av vilken av dessa pilar som helst.

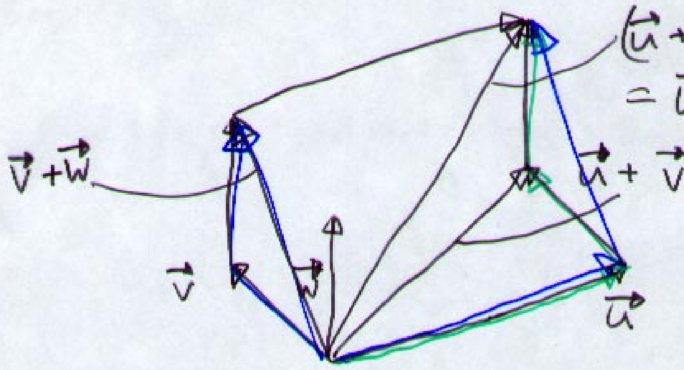




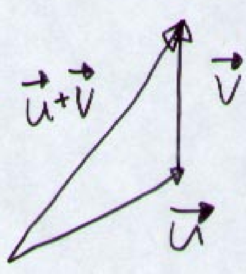




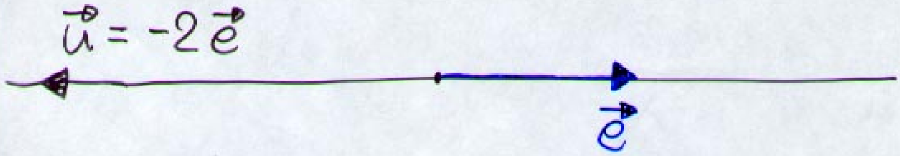
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

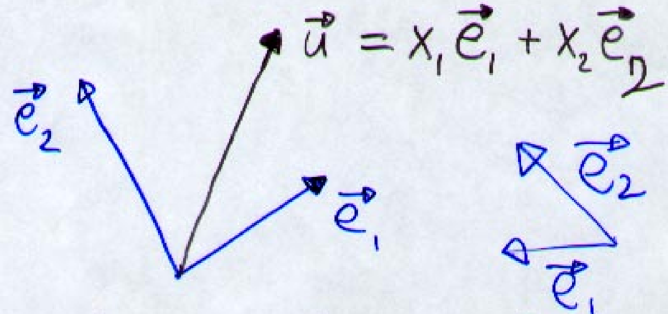


$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
$=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$



$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$





(x_1, x_2) är vektorn $\vec{u}$:s koordinater map basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Basen kallas ortogonal om basvektorerna är parvis vinkelräta och ortonormal om de dessutom har längd 1.

Definition 2.4: Mängden av alla reella talpar (x,y) med addition och multiplikation med skalär definierade av

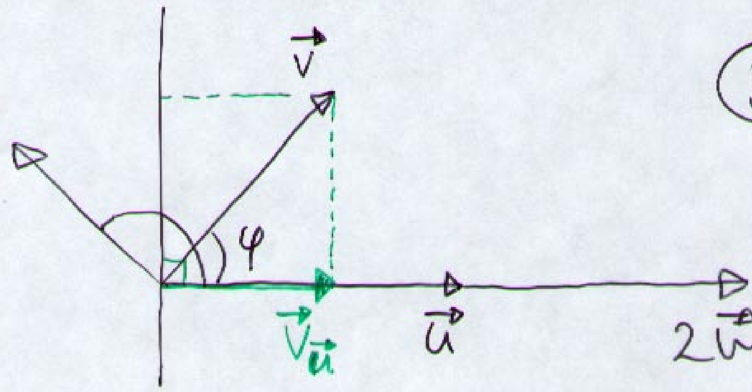
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

kallas vektorrummet $\mathbb{R}^2$.

Motsvarande för $\mathbb{R}^n$.

Observera att operationerna stämmer överens med de för matriser.

5



$$|\vec{v}_{\vec{u}}| = |\vec{v}| \cdot |\cos\varphi|$$

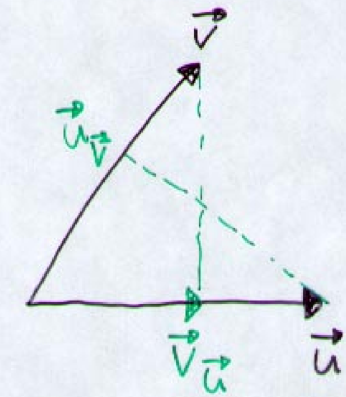
$$\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cos\varphi \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$ har längd 1

Definition 2.5:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\varphi \in \mathbb{R}$$

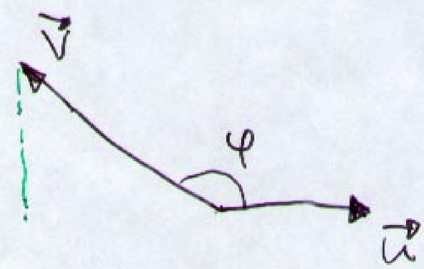
kallas skalär- eller inre produkten av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

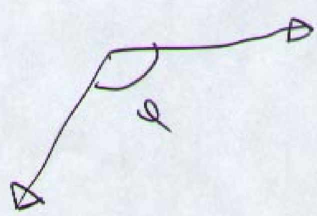


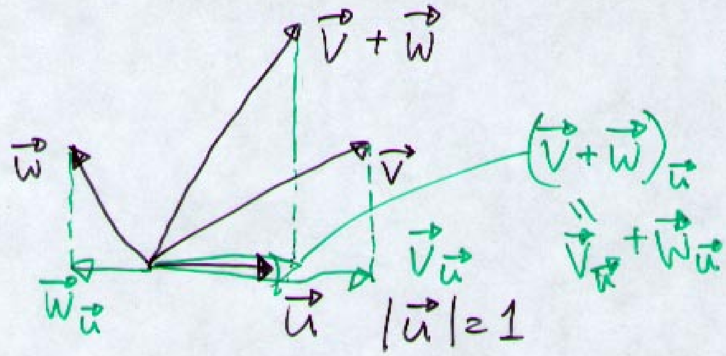
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$





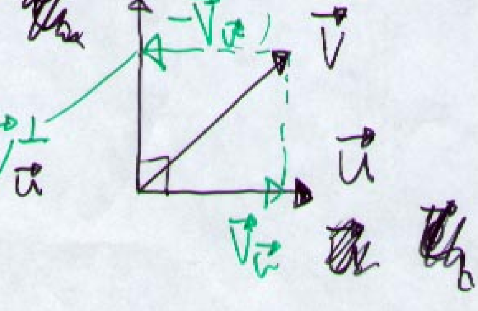
$|\vec u| = 1$

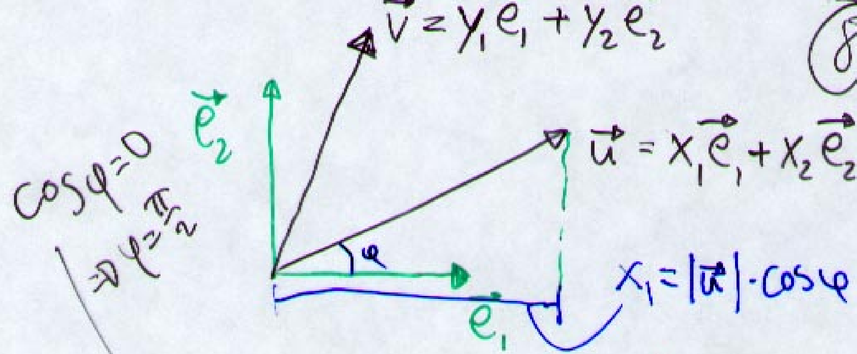
$$\vec u \cdot (\vec v + \vec w) = \vec u \cdot \vec v + \vec u \cdot \vec w$$

$$\vec v_{\vec u} = (\vec u \cdot \vec v)\,\frac{\vec u}{|\vec u|^2}$$

OBS! beror ej av längden på $\vec u$.

$$\vec v - \vec v_{\vec u} = \vec v_{\vec u}^{\perp}$$





Antag $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ är en (ortonormerad) ON-bas, dvs

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0, \quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 1$$

$$x_1 = \vec{u}\cdot\vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{u}\cdot\vec{e}_2$$

$$y_1 = \vec{v}\cdot\vec{e}_1, \quad y_2 = \vec{v}\cdot\vec{e}_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)\cdot(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$= x_1 y_1 \overbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}^{=1} + x_1 y_2 \overbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}^{=0} + x_2 y_1 \overbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}^{=0} +$$

$$+ x_2 y_2 \underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2}_{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

$$(x_1, y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Definition 2.6:

Skalärprodukten av två vektorer (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i $\mathbb{R}^2$ definieras av

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

och av två vektorer i $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Bas $\{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ respektive

$\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$.

Definition 2.7: $\sqrt{(x,y)\cdot(x,y)}$

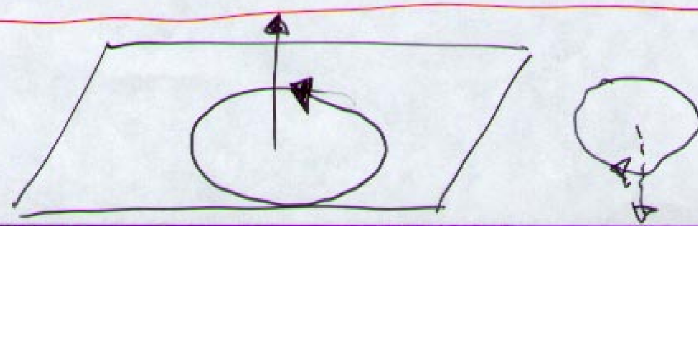
Beloppet

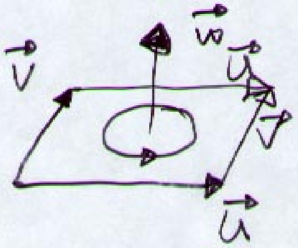
$$|(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

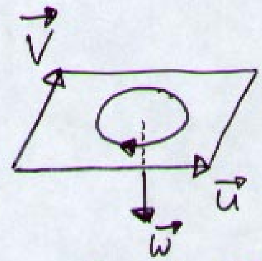
$$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Definition 2.8

Ett areaelement är mängden av alla sinsemellan plana ytstycken med samma area.
Areaelementet är orienterat om en orienterad cirkel valts i ett plan parallellt med elementet.
Elementnormalen är den av elementets normalvektorer, vald enligt högerprincipen, som har en längd, som till mätetalet är lika stor som elementets area.

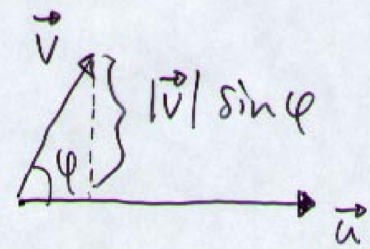






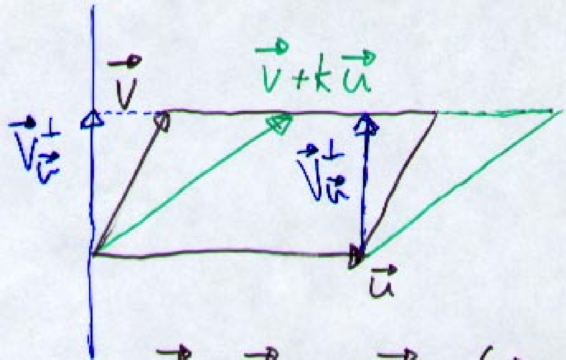
$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$

$\vec{w}$ är elementnormalvektorn som hör till areaelementet uppspänt av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ respektive $\vec{v}$ och $\vec{u}$.



$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\varphi.$$

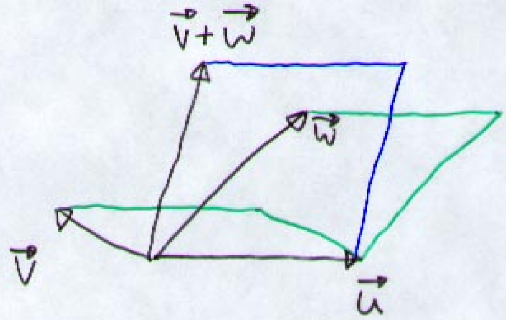
$$\vec{v} = \vec{v}_{\vec{u}} + \vec{v}_{\vec{u}}^{\perp}$$



Samma höjd

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\vec{v} + k\vec{u})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}_{\vec{u}}^{\perp}$$



$$\vec{v}_{\vec{u}}^{\perp} + \vec{w}_{\vec{u}}^{\perp} = (\vec{v} + \vec{w})_{\vec{u}}^{\perp}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

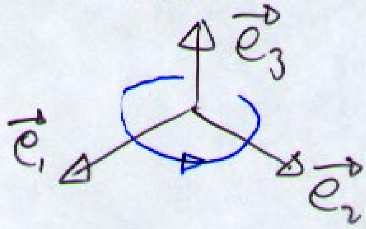
Sats 2.6:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z})$$

Antag att vi har en ON-bas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ som är positivt orienterad



$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$ area noll

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$$

$$= x_1y_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1y_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + x_2y_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) +$$

$$+ x_2y_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + x_3y_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + x_3y_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$$

$$= x_1y_2\vec{e}_3 + x_1y_3(-\vec{e}_2) + x_2y_1(-\vec{e}_3)$$

$$+ x_2y_3(\vec{e}_1) + x_3y_1\vec{e}_2 + x_3y_2(-\vec{e}_1)$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 +$$

$$+ (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3 =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Exempel: $(1,3,5) \times (0,1,4) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (12-5, -4, 1) = (7,-4,1)$$

$$(1,3,5) \cdot (7,-4,1) = 7 - 12 + 5 = 0$$

$$(0,1,4) \cdot (7,-4,1) = 0 - 4 + 4 = 0$$

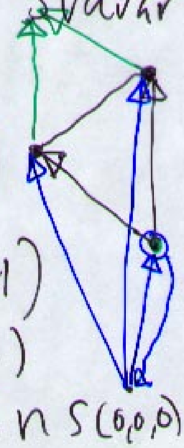
$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exempel: En triangel har sina hörn i punkterna $(1,0,0)$, $(1,5,5)$, $(0,2,4)$. Vilken area har den?

Lösning: Vektorerna som svarar mot sidorna blir



$$(1,5,5)-(1,0,0)=(0,5,5)$$
$$(0,2,4)-(1,0,0)=(-1,2,4)$$
$$(1,5,5)-(0,2,4)=(1,3,1)$$

Parallellogrammet som spänns av dessa vektorer har arean

$$|(0,5,5)\times(-1,2,4)| =$$

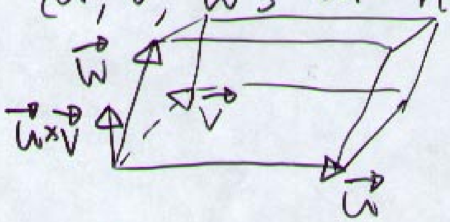
$$\left\| \left(\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \right\| =$$ (16)

$$= \|(10, -5, +5)\| = \sqrt{10^2+5^2+5^2} = \sqrt{150}$$

Triangelarean blir så $\frac{1}{2}\sqrt{150}$.

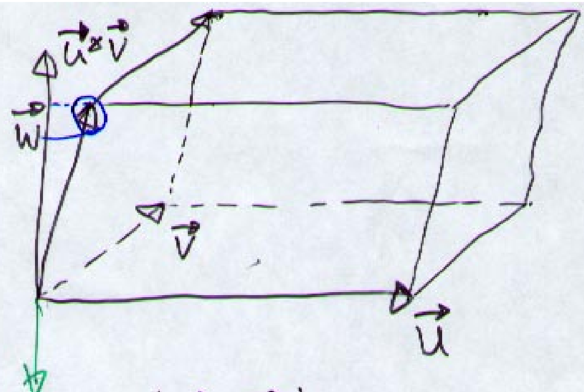
Definition 2.11:

Ett volymselement är mängden av kroppar med samma volym V. Volymselementet är positivt om $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ är högerorienterade



Volymselementets värde är

$\pm V$.



Basarean $|\vec{u} \times \vec{v}|$

höjd $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| \dfrac{1}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

Volymen $|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

Definition 2.1.12:

Trippelprodukt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (x_1, y_1, z_1)\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right) = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exempel: $\vec{u} = (1, 0, 2)$
$\vec{v} = (1, 1, 3)$
$\vec{w} = (2, 1, 0)$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} = -3 - 2 = -5$$

Exempel: Ligger vektorerna

$$\vec{u}=(1,0,2),\ \vec{v}=(0,1,1),\ \vec{w}=(1,2,4)$$

i samma plan?

Vi testar med trippelprodukten

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&2&4\end{vmatrix} \ (-1) = \begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&2&2\end{vmatrix} \ (-2)$$

$$= \begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix} = 0.$$ Alltså ligger

$\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ i samma plan.

$$\begin{vmatrix}1&3\\0&4\end{vmatrix} = 4 \neq 0$$ så $(1,3)$ och $(0,4)$

är inte proportionerliga.

Exempel: Triangeln Δ har hörn i punkterna $(1,2)$ och $(2,2)$ och $(1,3)$, vilken är dess area?

Vi gör om det till ett problem i rummet:

Betrakta triangeln med hörn $(1,2,0)$, $(2,2,0)$ och $(1,3,0)$.

$$(2,2,0)-(1,2,0)=(1,0,0)=\vec{u}$$
$$(1,3,0)-(1,2,0)=(0,1,0)=\vec{v}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$
$$=(0,0,1)$$

Triangelns area blir $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}$.