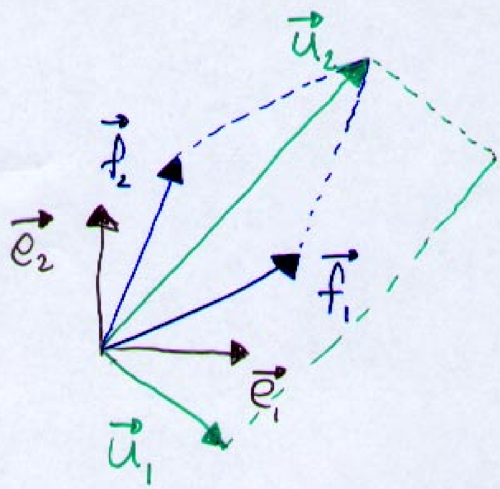
①



$$\vec{u}_1 = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2$$
$$\vec{u}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2$$

Parallellogrammet spänt av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ har area

$$|(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)| = |(x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2) \times$$
$$\times (y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2)| =$$
$$= |(x_1y_2 - x_2y_1)(\vec{f}_1 \times \vec{f}_2)| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} (\vec{f}_1 \times \vec{f}_2) \right|$$ ②

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \det U \, (\vec{f}_1 \times \vec{f}_2)$$

$$A\vec{u}_1 = x_1 A\vec{f}_1 + x_2 A\vec{f}_2$$

$$A\vec{u}_2 = y_1 A\vec{f}_1 + y_2 A\vec{f}_2$$

$$A\vec{u}_1 \times A\vec{u}_2 = \det U \, (A\vec{f}_1 \times A\vec{f}_2)$$

$$= \det U \det A \, (\vec{f}_1 \times \vec{f}_2)$$

$$= \det A \, (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$$

Definition 4.1: Mängden av n-tupler $(x_1, \dots, x_n)$ av reella tal kallas $\mathbb{R}^n$. n-tuplerna kallas punkter eller vektorer i $\mathbb{R}^n$.

③

Addition:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplikation med skalär:

$$k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n)$$

Skalär produkt:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

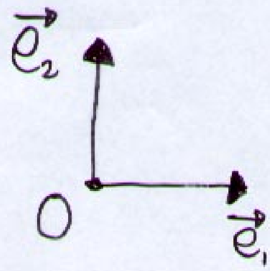
Addition och multiplikation (4)
med skalär fungera som
för radvektorer.

$$(x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

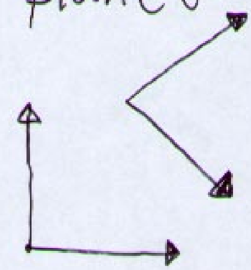
Om vi identifierar en
punkt i $\mathbb{R}^n$ med motsvarande
radvektor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}\,\vec{v}^T$$

$\mathbb{R}^2$



planet



<u>Definition 4.2:</u>

Parallellitet: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ parallella, $\vec{x} \parallel \vec{y}$, om $\vec{x} = k\vec{y}$ eller $\vec{y} = \vec{0}$.

Beloppet eller längden:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\ .$$

Avstånd:

$$d = |\vec{x} - \vec{y}|.$$

Sats 4.2 (Schwarz olikhet) 6

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

med likhet om och endast om $\vec{x}$ är parallell med $\vec{y}$.

Schwarz olikhet visar att

$$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{|\vec{x}||\vec{y}|} \leq 1$$

så vi kan definiera vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$ som

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Definition 4.3:

Vinkel: Vinkeln mellan $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}$$

Ortogonalitet: Om vinkeln mellan två vektorer är $\frac{\pi}{2}$ eller om någon av dem är nollvektorn, så sägs vektorerna vara ortogonala $\vec{x} \perp \vec{y}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

Triangelolikheten:

$$|\vec{x}+\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|+|\vec{y}|$$

med likhet om och endast om $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

$$(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2 - |\vec{x}+\vec{y}|^2 =$$

$$|\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 - (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$

$$= 2|\vec{x}||\vec{y}| - 2\vec{x}\cdot\vec{y} \geq 0$$

enligt Schwarz olikhet.

9

Definition: Om $\vec{r}_0$ och $\vec{v} \neq 0$ är element i $\mathbb{R}^n$, så sägs delmängden av element, $\vec{r}$, som uppfyller

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

vara en rät linje.

Exempel:

$$\vec{r} = (0,-1,2,1) + t(-1,4,2,0)$$

är en linje i $\mathbb{R}^4$ med riktning $(-1,4,2,0)$.

Definition: Om en vektor $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + \dots + x_m\vec{u}_m$ säger man att $\vec{v}$ är en linjär kombination av vektorerna $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$.

Definition 4.6: Ett antal vektorer $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ sägs vara linjärt beroende om någon av dem är en linjär-kombination av de övriga.

~~I annat fall är de linjärt~~

I motsatt fall är de linjärt oberoende.

11

Observera att vektorerna $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ är linjärt beroende precis då nollvektorn är en linjär kombination av $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$

$$x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_m\vec{u}_m = \vec{0}.$$

$u_1 = y_2 u_2 + \ldots y_m u_m$ $\quad 0 = -u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_m u_m$

Exempel: Vektorerna

(1,3,5), (-1,2,1), (0,4,3), (1,0,2)

är linjärt beroende.

$$x_1(1,3,5)+x_2(-1,2,1)+x_3(0,4,3)+(1,0,2)x_4=\vec{0}$$

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+(-1)x_2+0x_3+1\cdot x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+0x_4=0 \\ 5x_1+1x_2+3x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

Homogent liggande system har oändligt många lösningar.

Exempel: Vektorerna $(1,0,3)$, $(-1,2,2)$ och $(0,1,1)$ är linjärt oberoende.

$$x_1(1,0,3) + x_2(-1,2,2) + x_3(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) -3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) 1 \quad -5 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Sats 4.4: $\vec{v}$ är en linjär kombination av vektorerna $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ om och endast om

$$\left(\vec{u}_1^T \ \vec{u}_2^T \ldots \vec{u}_m^T \,\middle|\, \vec{v}^T \right)$$

har någon lösning.

Exempel: $\vec{u}_1 = (1,3,5)$, $\vec{u}_2 = (-1,2,1)$
$\vec{u}_3 = (0,4,3)$ och $\vec{v} = (1,0,2)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad -3 \quad -5$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad 1/5$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad 1 \quad -6$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 3/5 \end{array}\right) \quad -5/9$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \quad -4/5 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$(1,0,2) = \frac{2}{3}(1,3,5) - \frac{1}{3}(-1,2,1) - \frac{1}{3}(0,4,3).$$

Sats: Vektorerna $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ är linjärt beroende om och endast om

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{u}_1^{\,T} & \vec{u}_2^{\,T} & \cdots & \vec{u}_m^{\,T} & \vec{0}^{\,T} \end{array}\right)$$

har icke-triviala lösningar.

Sats 4.5: Fler än n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende. 17

Exempel: Standardbasen

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0) \dots \vec{e}_n = (0,\dots,0,1)$$

är en uppsättning linjärt oberoende vektorer.

$$\left(\vec{e}_1^{\,T} \dots \vec{e}_n^{\,T} \,\middle|\, \vec{0}^{\,T} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sats 4.7: Om $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ är en uppsättning linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$, så är varje element på ett unikt sätt en linjär kombination av $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$.

Omvänt gäller att om varje vektor kan skrivas på ett unikt sätt som linjärkombination av vektorerna $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$

så är de linjärt oberoende.

Om $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ är linjärt oberoende har systemet

$$\left(\vec{u}_1^{\,T} \ldots \vec{u}_n^{\,T} \,\middle|\, \vec{0}^{\,T}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

precis en lösning.

Det medför att

$$\left(\vec{u}_1^{\,T} \ldots \vec{u}_n^{\,T} \,\middle|\, \vec{v}^{\,T}\right)$$

också har precis en lösning.

Omvänt har systemet

$$\left(\vec{u}_1^T \dots \vec{u}_n^T \,\middle|\, \vec{0}^T\right)$$

precis en lösning som alltså är den triviala.

Definition 4.7:

En uppsättning linjärt oberoende vektorer $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs utgöra en bas. De entydigt bestämda koefficienterna i linjär kombinationen för en vektor kallas dess koordinater med avseende på basen.

Exempel:

$$(1,3) = 2(1,2) - 1\cdot(1,1)$$

så $(1,3)$ har koordinaterna $(2,-1)$ med avseende på basen $\{(1,2),(1,1)\}$.

Definition 4.8:

En linjär avbildning A från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, $\vec{y} = A\vec{x}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$

ges av

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

dvs $\vec{y}^T = A\,\vec{x}^T$ där $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y})^T =$$

$$= A(\vec{x}^T + \vec{y}^T) = A\vec{x}^T + A\vec{y}^T$$

$$A(k\vec{x}) = A(k\vec{x})^T = A(k\vec{x}^T)$$

$$= kA\vec{x}^T = kA\vec{x}.$$

Sats: Följande är ekvivalent

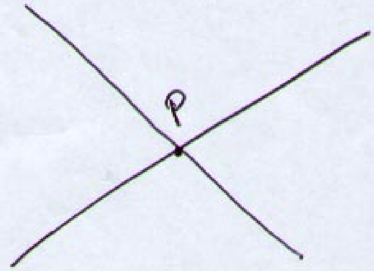
i) $\det A \neq 0$

ii) radvektorerna är linjärt oberoende.

iii) kolonnvektorerna är linjärt oberoende.

Exempel: Avgör om $(1,2,1)$, $(0,1,3)$ och $(4,0,2)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

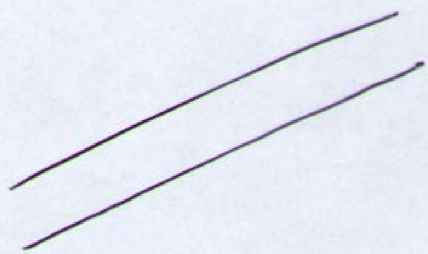
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2+24-4 = 22 \neq 0$$



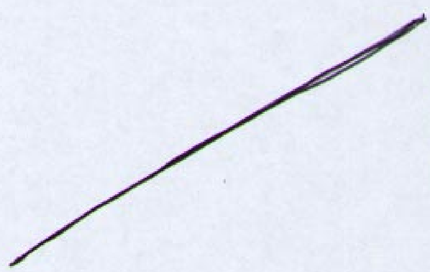
$L1 \quad ax+by+c=0$

$L2 \quad dx+ey+f=0$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

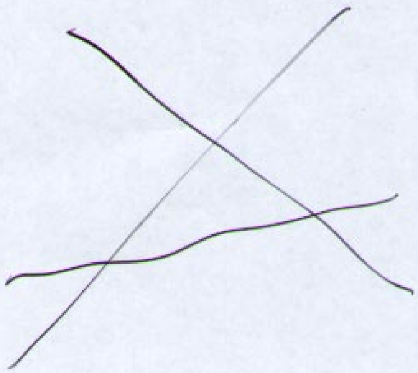


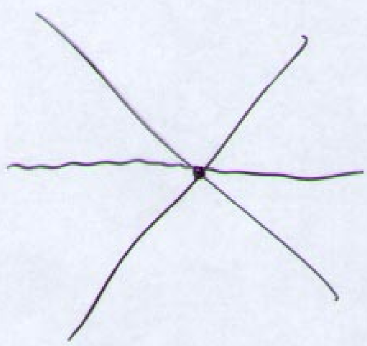
$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+d=0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \\ gx+hy+i=0 \end{cases}$$





Exempel: $(2,3,1)$, $(1,0,2)$ och $(6,-3,-3)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0+36-3-0+9+12$$
$$= 54 \neq 0.$$

$(2,3,1)$, $(1,0,2)$, $(0,3,-3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0+0+3-0+9-12$$
$$= \underline{\underline{0}}$$

Exempel: $\vec{u} = (2,3,1)$, $\vec{v} = (1,0,2)$ och $\vec{w} = (0,3,-3)$. Är $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ linjärt oberoende?

$$\begin{array}{c} \\ \\ -2 \;\; -3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 6 \;\; -2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ systemet har oändligt många lösningar. Vektorerna är linjärt beroende.

Vi vill skriva $\vec{w} = (0,3,-3)$
som en linjär kombination
av $\vec{u} = (2,3,1)$ och $\vec{v} = (1,0,2)$.

$$-2 \quad -3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \; -\tfrac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \; 6 \quad -2 \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \qquad (0,3,-3) = (2,3,1) - 2(1,0,2)$$

$$(2,3,1)\times(1,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$ 29

$$= \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (6, -3, -3).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

linjärt oberoende