Koordinatbyte

①

Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en bas.

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Om $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ också är en bas

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot C$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \cdot D$$

$$\Rightarrow \quad D = C^{-1}.$$

C kallas transformations-matrisen från $\vec{e}$- till $\vec{f}$-systemet.

$$\boxed{\text{Sats: Antalet basvektorer = rummets dimension.}}$$

Antal vektorer > dimensionen: (3)

$\Rightarrow$ liggande system

$\Rightarrow$ oändligt många lösningar

$\Rightarrow$ inte linjärt oberoende

\# vektorer < dim

$\Rightarrow$ stående system

$\Rightarrow$ spänner ej upp $\mathbb{R}^n$
då systemet i allmänhet saknar lösningar.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

Sats 7.1: C transformations-matris $\Leftrightarrow$ C inverterbar. 4

Exempel: Låt $\{\vec{e}_1=(1,0), \vec{e}_2=(0,1)\}$ och $\{\vec{f}_1=(1,2), \vec{f}_2=(3,1)\}$. Vi har

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{-1}{5}.$$

ON-system

5

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 \ , \ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 = \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 = 1 \ , \ \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 = (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) \cdot (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2)$$

$$= c_{11}^2 + c_{21}^2 .$$

$$\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 = (c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2) \cdot (c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2)$$

$$= c_{12}^2 + c_{22}^2 .$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2)\cdot(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2)$$ 6

$$= c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}$$

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{C^T C = E}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{C^T = C^{-1}.}$$

7

En matris som uppfyller $C^T C = E$ kallas ON-matris.

Exempel: Matrisen som svarar mot rotation med vinkeln φ är en ON-matris.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel: Matrisen som svarar mot spegling i linjen $x=y$ är en ON-matris. 8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koordinater

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

$$= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2$$

$$\vec{x}_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

9

$$\vec{x} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\,\vec{x}_e$$
$$= (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\,\vec{x}_f$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\,C\,\vec{x}_f$$

$$\boxed{\vec{x}_e = C\,\vec{x}_f}$$

Exempel: $\vec{x} = \vec{f}_1 \Rightarrow \vec{x}_f = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{x}_e = C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\end{pmatrix}.$$

$\vec{x} = \vec{f}_2 \Rightarrow \vec{x}_f = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{x}_e = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\end{pmatrix}.$$

Exempel: Låt $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ vara basen $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ och $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ standardbasen. Vad blir ~~koord~~ $\vec{X}_f$ om $\vec{X}_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$\vec{X}_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{X}_f$$

ON-matris

$$\vec{X}_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{X}_e$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Linjära avbildningar

11

Låt $\mathbb{A}_e$, $\mathbb{A}_f$ vara matriserna för den linjära avbildningen A i baserna $\vec{e}$ resp $\vec{f}$.

$$\vec{y} = A\vec{x} = \mathbb{A}_e \vec{x}_e = \mathbb{A}_f \vec{x}_f$$

$$\vec{y}_e = \mathbb{A}_e \vec{x}_e$$

$$\vec{y}_f = \mathbb{A}_f \vec{x}_f$$

$$\vec{x}_e = C\,\vec{x}_f$$

$$\vec{y}_e = C\,\vec{y}_f$$

$$C^{-1}\vec{y}_e = \vec{y}_f = A_f\vec{x}_f = A_f C^{-1}\vec{x}_e$$ 12

$$\vec{y}_e = C A_f C^{-1}\vec{x}_e$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_e &= C A_f C^{-1} \\ A_f &= C^{-1} A_e C \end{aligned}}$$

Exempel: Låt $\vec{e}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$ och $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Låt vidare A vara spegling i linjen $x=y$.

13

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ON-matris}$$

$$A_f = C^{-1} A_e C = C^{T} A_e C$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisering

En diagonal matris är en av typ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatriser är enkla att jobba med 14

tex $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 4 \end{pmatrix}$

De svarar mot enkla linjära avbildningar:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1 \\ A\vec{e}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2 \\ A\vec{e}_3 = \lambda_3 \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$A_e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_3 x_3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringsproblemet (15)

består i att hitta en transformationsmatris så att

$$A_f = C^{-1} A_e C$$

blir diagonal. Problemet är ekvivalent med att hitta en bas av **egen-vektorer** till A, dvs vektorer som uppfyller

$$Av = \lambda v$$

λ kallas då ett egenvärde till A.

Exempel: Hitta egenvektorerna till matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

(17)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$$

karakteristiska ekvationen

Exempel: Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1$$

så den karakteristiska ekvationen saknar reella lösningar.

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ dubbelrot.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egenvektor

men vi får ingen bas, så matrisen är ej diagonaliserbar.

Sats 7.6: Om en matris har n-st olika egenvärden så är den diagonaliserbar.

Sats 7.7: Om $\{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k\}$ är en uppsättning egenvektorer till en linjär avbildning med olika reella egenvärden så är vektorerna linjärt oberoende.

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $(1,1,1)$, $(2,1,1)$ och $(1,1,2)$ är linjärt oberoende.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2+1+2-1-4-1=-1\neq 0.$$

Exempel: Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. (22)

Beräkna A^5.

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 2)^2 - 9$$

$$\lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = (CDC^{-1})(CDC^{-1})(CDC^{-1}) \cdot$$

$$\cdot (CDC^{-1})(CDC^{-1}) =$$

$$= C D^5 C^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3125 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3123 & 3126 \\ 6252 & 6249 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1041 & 1042 \\ 2084 & 2083 \end{pmatrix}.$$

Sats 7.8: A kan diagonaliseras med ett koordinatbyte av ON-typ om och endast om matrisen är symmetrisk: $A^T = A$.

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 -$$

$$- 2 - 3(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2, \lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$