Andragradskurvor 1

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Antag först att $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$\Leftrightarrow (Ax^2 + 2Dx) + (Cy^2 + 2Ey) + F = 0$$

$\Leftrightarrow$ Vi kvadratkompletterar

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 - \frac{E^2}{C} +$$

$$+ F = 0$$

$$\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} = 0$$

Sätt $G = F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$ 2

och $\xi = x + \frac{D}{A}$

$\eta = y + \frac{E}{C}$.

I ξ och η blir ekvationen

(*) $A\xi^2 + C\eta^2 + G = 0$

Ellipser: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$

Om A och C > 0 men G < 0 kan (*) skrivas om som ekvationen för en ellips.

Punkt: Om $G=0$ blir (*) ③
ekvationen för en
punkt $Ax^2+Cy^2=0$ $A,C>0$.

Ingenting: Om A,C,G alla är
>0 finns inga reella lös-
ningar.

Sammanfattningsvis har vi
att om $AC>0$ så beskriver
$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$
antingen en ellips, en
punkt eller ingenting.

Exempel: $9x^2+4y^2-36x-8y+40=0$ 4

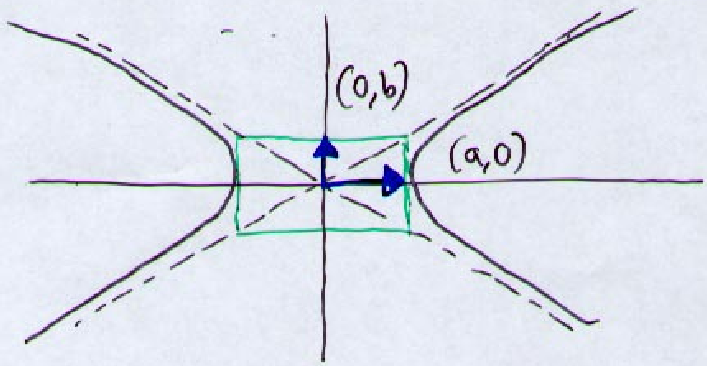
$\Leftrightarrow \quad 9(x^2-4x)+4(y^2-2y)+40=0$

$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2-36+4(y-1)^2-4+40=0$

$\Leftrightarrow \quad 9(x-2)^2+4(y-1)^2=0$

Ekvationen beskriver punkten $(2,1)$.

Hyperbel: Om $A>0$, $C,G<0$ blir ekvationen på formen $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$.



Hyperbelns huvudaxlar är sträckorna $(-a,0)$ till $(a,0)$ och $(0,-b)$ till $(0,b)$.

Två skärande linjer: Om $G=0$, $A>0$ och $C<0$ blir ekvationen på formen

$$Ax^2=-Cy^2$$

$$y=\pm kx$$

Om $AC<0$ får vi ⑥
alltså antingen en hyperbel eller två skärande linjer.

Exempel: $x^2-2y^2-2x-1=0$

Kvadratkomplettering ger

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1-2y^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-2y^2-2=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2}-y^2-1=0$

En hyperbel.

Om A eller $C=0$, (7)

så har vi en ekvation

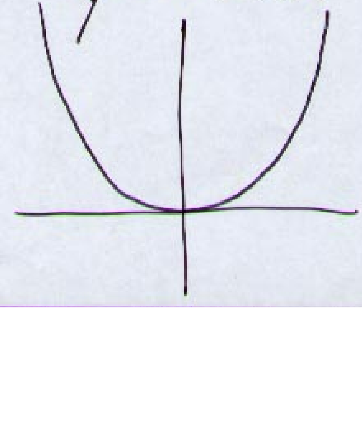
$$Ax^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

genom att kvadratkomplettera får vi

$$(**) \quad Ax^2+E'y+H=0.$$

Parabel: Om $E' \neq 0$ kan $(**)$ skrivas på formen

$$y=kx^2$$



Parallella linjer:

Om $E=0$ får vi att $(**)$ reduceras till

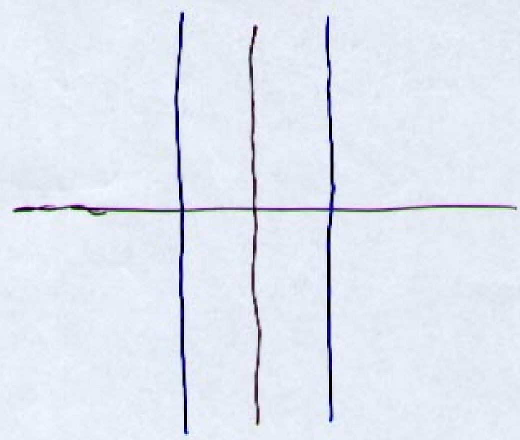
$$Ax^2 + H = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{H}{A}.$$

Om nu $\frac{H}{A}$ är negativt blir det två räta parallella linjer annars ingenting.

Exempel: $4x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\cancel{2}} = \pm\frac{3}{2}.$$



Vi har således att om $AC=0$ blir det antingen en parabel, eller två parallella linjer eller ingenting alls.

Allmänna fallet:

(1) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

(A, B, C inte alla $=0$)

Vi ska nu undersöka det allmänna fallet och se att ekvationen beskriver samma geometriska objekt då.

Låt $\vec{l}=\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$ och $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De linjära termerna i (1)

kan nu ~~be~~skrivas

$$2Dx + 2Ey = 2\vec{l}^T\vec{x}.$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$\Rightarrow$ Ekvation (1) kan nu skrivas

$$(2) \quad \vec{x}^T\mathbb{K}\vec{x} + 2\vec{l}^T\vec{x} + F = 0.$$

Exempel: $4x^2 + 4xy - y^2 + 8x + 3 = 0$

$\vec{l} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 12

$$(x,y)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(4,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 = 0.$$

Observera att $\mathbb{K}$ per konstruktion är symmetrisk, den går alltså att diagonalisera med ett ON-basbyte. Det betyder att man kan reducera det allmänna fallet till fallet $\mathbb{B}=0$.

Om $\vec{f}$ är en ny ON-bas 13

$$\vec{x} = C\vec{x}_f$$

där C är en ON-matris.

I de nya koordinaterna blir ekvation (2)

$$(C\vec{x}_f)^T \mathbb{K} C\vec{x}_f + 2\vec{l}^T C\vec{x}_f + F = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_f^T (C^T \mathbb{K} C)\vec{x}_f + 2(C^T\vec{l})^T \vec{x}_f + F = 0.$$

$$\mathbb{K}_f = C^T \mathbb{K} C \,, \quad \vec{l}_f = C^T \vec{l}$$

$$\vec{x}_f^T \mathbb{K}_f \vec{x}_f + 2\vec{l}_f^T \vec{x}_f + F = 0.$$

14

$$\mathbb{K}_f = \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_f^T \mathbb{D} \vec{x}_f + 2 \vec{l}_f^T \vec{x}_f + F = 0$$

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2D'\xi + 2E'\eta + F = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det \mathbb{K}_f \\ &= \det(C^T \mathbb{K} C) \\ &= \det(C^T) \det \mathbb{K} \det C \\ &= \det \mathbb{K} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \end{aligned}$$

Exempel: Vilken kurva svarar mot ekvationen

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 - 1 = 0?$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{K} = -16 - 9 = -25 < 0$$

så ekvationen beskriver en hyperbel eller två skärande räta linjer.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda) - 9 =$$

$$= \lambda^2 - 25$$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

16

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\mathbb{K}_f = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

I de nya koordinaterna

$$5\xi^2 - 5\eta^2 - 1 = 0,$$

en hyperbel.

Andragradsytor

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+$$
$$+Fz^2+2Gx+2Hy+2Iz+J=0.$$

Huvudaxelform:

1. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ ellipsoid

2. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ enmantlad hyperboloid

3. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1$ tvåmantlad hyperboloid

4. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=0$ elliptisk kon

(18)

(5) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=z$ elliptisk paraboloid

(6) $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=z$ hyperbolisk paraboloid

(7) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ elliptisk cylinder

(8) $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ hyperbolisk cylinder

(9) $\left(\frac{x}{a}\right)^2=z$ parabolisk cylinder

(10) $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=0$ två skärande plan

(11) $\left(\frac{x}{a}\right)^2=1$ två parallella plan

19

(12) $\left(\frac{x}{a}\right)^2=0$ Ett plan

(13) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=0$ en rät linje

(14) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=0$ en punkt

(15) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=-1$

$\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1$ ingenting

Reduktion till huvudaxelform

Låt $\mathbb{K}=\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix},\ \vec{l}=\begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}$

då kan vi skriva ekvationen

$$\vec{x}^T \mathbb{K} \vec{x} + 2\vec{l}^T \vec{x} + J = 0.$$

Då $\mathbb{K}$ är symmetrisk kan vi byta bas och få

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + 2G'\xi + 2H'\eta + 2I'\zeta + J = 0$$

Om alla egenvärdena är $\neq 0$. kan vi kvadratkomplettera och få

$$\lambda_1 (\xi')^2 + \lambda_2 (\eta')^2 + \lambda_3 (\zeta')^2 + J' = 0$$

Den svarar då mot (21)
någon av huvudaxelformerna
1, 2, 3, 4, 14 eller 15.

Om ett egenvärde är noll:

$$\lambda_1(\xi')^2 + \lambda_2(\eta')^2 + 2I\zeta + J' = 0$$

huvudaxelform: 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15.

Om två egenvärden är noll:

$$\lambda_1(\xi')^2 + 2H\eta + 2I\zeta + J' = 0$$

Huvudaxelform: 9, 11, 12, 15.

3.22 a) $(x,y,z) = (7,12,5) + t(-1,0,-1)$

$(x',y',z') = (7,10,3) + t(0,1,1)$

Hur nära kommer planen varandra och när inträffar det?

$$|(x,y,z)-(x',y',z')| = |(0,2,2)+t(-1,-1,-2)|$$

$$= |(-t, 2-t, 2-2t)| = \sqrt{t^2+(2-t)^2+(2-2t)^2}$$

$$= \sqrt{t^2+4-4t+t^2+4-8t+4t^2} = \sqrt{6t^2+(-12t)+8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(6t^2-12t+8\right) = 12t-12 = 0 \Rightarrow t=1$$

$$\sqrt{6-12+8} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

SVAR: Minsta avstånd $=\sqrt{2}$ vid tiden $t=1$.