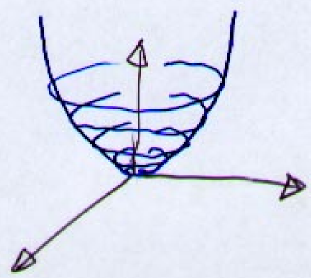
Funktioner av flera variabler 1

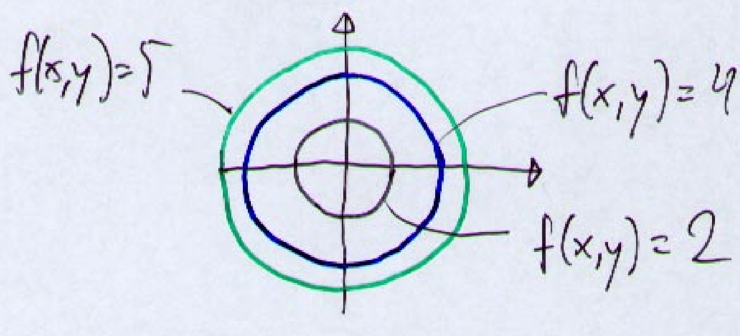
Exempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Graf $z = f(x,y)$



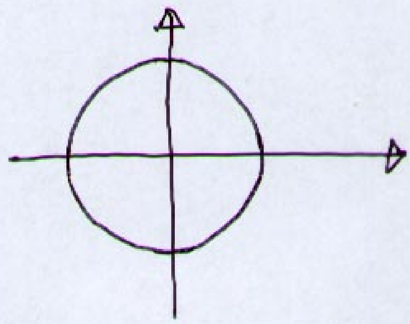
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Nivåkurvor

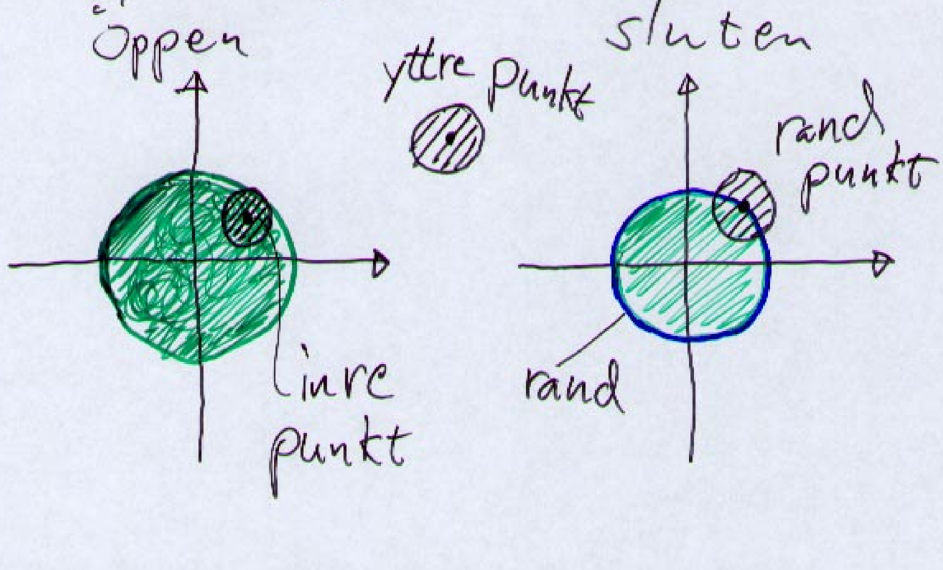


Exempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$



Mängder



Exempel:

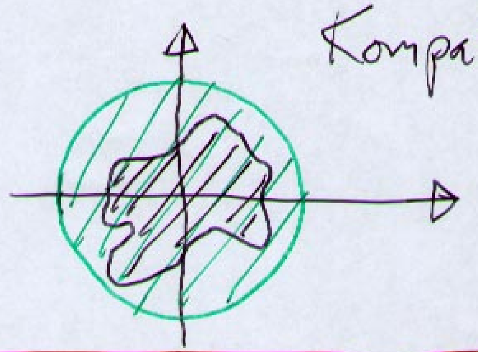
$$M_1 = \{ (x,y) ; x^2 + y^2 < 1 \}$$

är öppen

$$M_2 = \{ (x,y) ; x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

är sluten

Kompakt

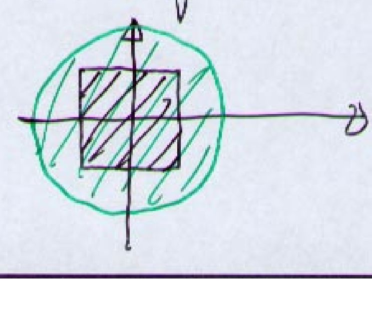


Definition 2.8 En mängd som är både sluten och begränsad kallas kompakt.

Exempel:

$$\{(x,y)\,;\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$$

är kompakt



Parameterkurvor

5

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

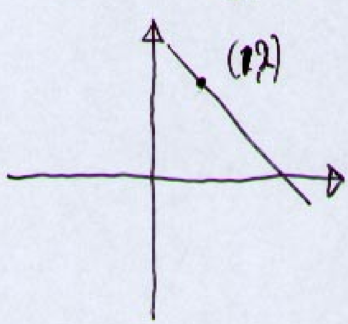
Exempel: $\vec{f}_1(t) = (1+t, 2-t)$

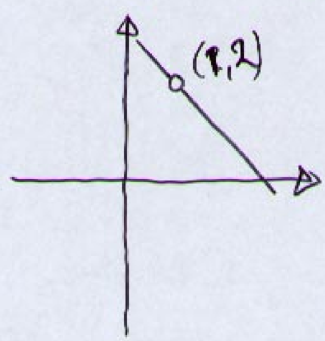
$$\vec{f}_1(t) = (1,2) + t(1,-1)$$

genererar en linje.

$$L = \{ (x,y) ; (x,y) = f(t) \text{ för något } t \}$$

Exempel: $\vec{f}_2(t) = \left(1 + \frac{1}{t}, 2 - \frac{1}{t}\right)$





$$\lim_{t \to \infty} \vec{f}_2(t) = (1,2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Definition (egentligt gränsvärde):}\\ \lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{c} \iff \lim_{t \to a} |\vec{f}(t) - \vec{c}| = 0\end{array}}$$

$$\lim_{t \to +0} |\vec{f}_2(t)| = \infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Def (oegentligt gränsvärde):}\\ \lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \infty \iff \lim_{t \to a} |\vec{f}(t)| = \infty\end{array}}$$

OBS! $\frac{1}{t}$ saknar gränsvärde $t \to 0$

men $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right) = \infty$

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}_1(t) = (1,2) = \vec{f}_1(0)$$ 7

funktionen $\vec{f}_1$ är kontinuerlig i punkten $t=0$.

För egentliga gränsvärden gäller

$$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t\to a} f_n(t)\right).$$

Exempel: $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}, 1-\frac{1}{t^2}\right)$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}, \lim_{t\to\infty} 1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= (0,1).$$

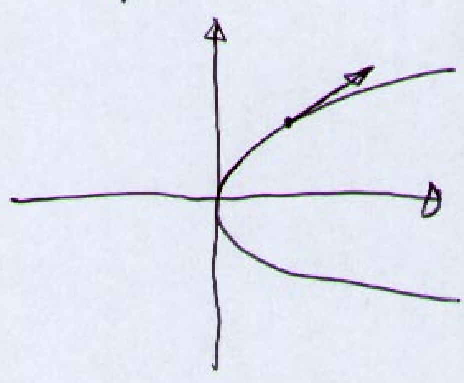
$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

$$= \left(f_1'(t), \ldots, f_n'(t) \right).$$

Exempel: $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$

$$\vec{f}'(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

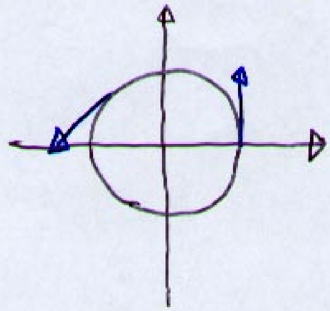
Exempel: $\vec{f}(t) = (t^2, t)$



$\vec{f}'(t) = (2t, 1)$

tangentvektor

Exempel: $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t)$



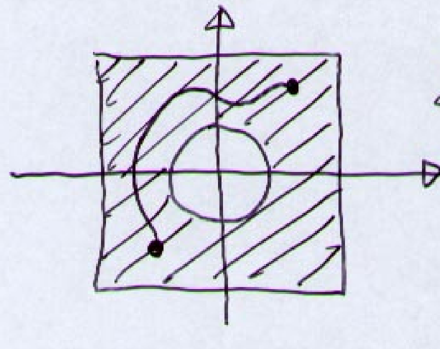
Längd

$$\int_0^{2\pi} |\vec{f}'(t)|\,dt =$$

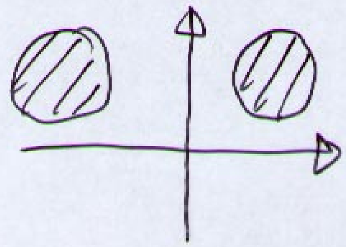
$$= \int_0^{2\pi} |(-\sin t, \cos t)|\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Definition:

En mängd M kallas sammanhängande om varje par av punkter i M kan förbindas med en kurva i M.



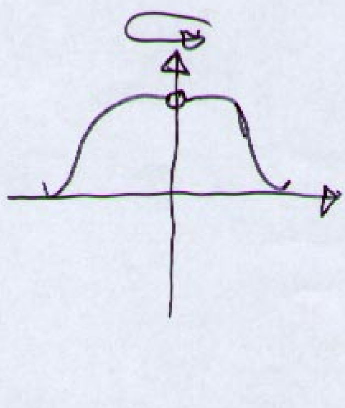
Samman-
hängande

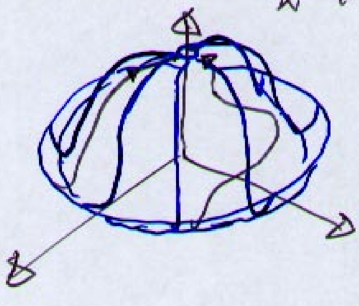


Osamman-
hängande.

Funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Exempel: $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$





Oavsett hur vi går mot punkten $(0,0)$ så närmar sig $f(x,y)$ värdet 1.

Def: En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har gränsvärde A när $(x,y) \to (a,b)$ om

$$\lim_{t \to c^-} f(\vec{r}(t)) = A$$

för alla funktioner $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sådana att

$$\lim_{t \to c^-} \vec{r}(t) = (a,b)$$

och $\vec{r}(t)$'s värden ligger i definitionsmängden för f.

Exempel: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ 12

Låt $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en funktion sådan att

$$\lim_{t\to c^-} \vec{r}(t) = (0,0), \quad \vec{r}(t) \neq (0,0) \quad t<c$$

$$\lim_{t\to c^-} \frac{\sin\left(|\vec{r}(t)|^2\right)}{|\vec{r}(t)|^2} = \left[\begin{array}{l} s = |\vec{r}(t)|^2 \\ t\to c^- \Leftrightarrow s\to 0 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\sin s}{s} = 1.$$

Exempel: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$

existerar ej.

Längs linjen $x=0$, dvs $\vec{r}(t)=(0,t)$, får vi

$$\lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{t^2}=2$$

Längs linjen $y=0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1\neq 2.$$

Exempel: $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}=f(x,y)$

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}\quad |f(x,y)|=\left|\frac{r^3\cos^3\varphi}{r^2}\right|=$$

$$=r|\cos^3\varphi|\to 0 \text{ när } r\to 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

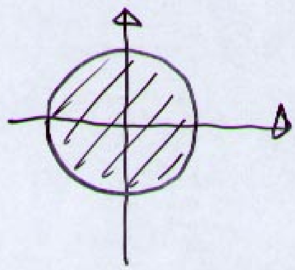
Sats 3.2: Om f: är en kontinuerlig funktion definierad på en kompakt mängd och av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så gäller

i) f har ett största och ett minsta värde.

ii) om D_f är sammanhängande så antar f alla värden mellan det största och det minsta värdet.

Exempel: $f(x,y)=\sqrt{-x^2\,[\text{redacted}]\,y^2+1}$

$D_f=\{(x,y)\ ;\ 1\geq x^2+y^2\}$



D_f kompakt och sammanhängande.

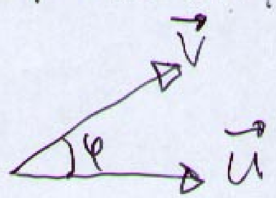
$f(x,y)$ antar sitt största värde, 1, när $(x,y)=(0,0)$ och sitt minsta, 0, på randen.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad f(x,y)=\sqrt{1-r^2}$$

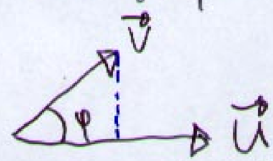
Skalärprodukt:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi \in \mathbb{R}$$

ett <u>tal</u>



Speciellt om $|\vec{u}| = 1$

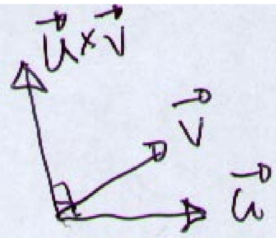


$\vec{u}\cdot\vec{v}$ blir då <u>längden</u> av projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$.

Om $|\vec{v}|$ också är 1 blir

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\varphi.$$

Kryssprodukt:



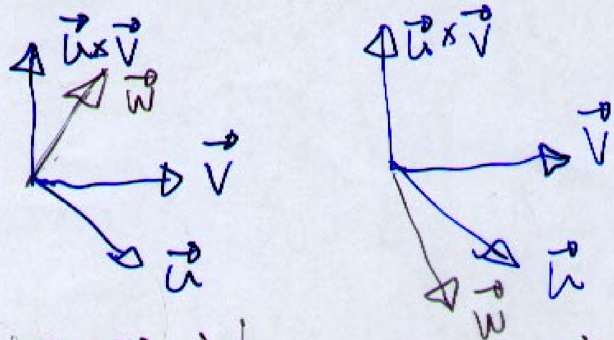
Den vektor som är normal till planet som späns av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, och gör $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ till ett positivt orienterat system. Dessutom ska längden vara lika med arean av parallellogrammet som späns av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Trippelprodukt:

$$\vec{w}\cdot\underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{\text{vektor}}$$

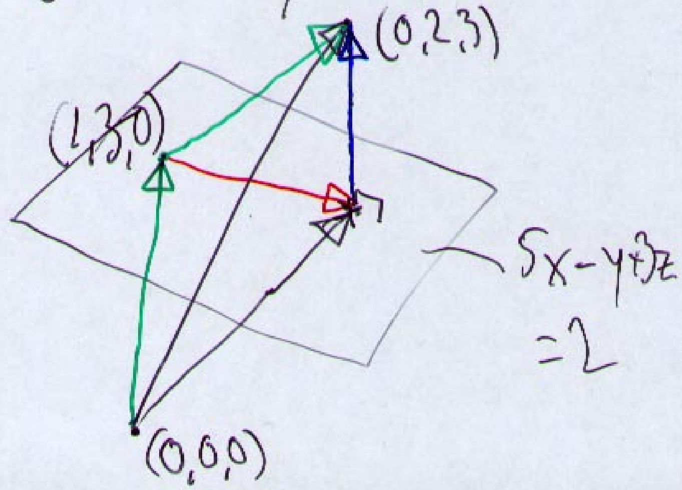
skalärprodukt

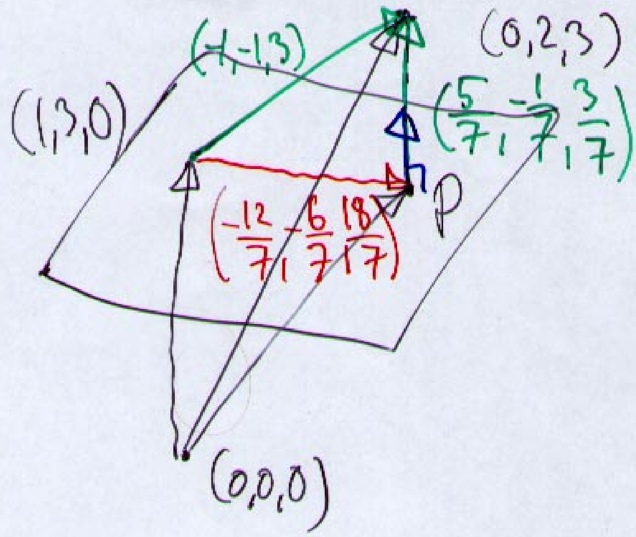
$\Rightarrow$ resultatet blir ett <u>tal</u>.



$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=V$ $\qquad$ $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=-V$

3.20. Vilka koordinater har den vinkelräta projektionen av punkten (0,2,3) på planet $5x-y+3z=2$.





$$\left((-1,-1,3)\cdot\frac{(5,-1,3)}{\sqrt{35}}\right)\frac{(5,-1,3)}{\sqrt{35}}$$

$$=(-5+1+9)\frac{(5,-1,3)}{35}=\left(\frac{5}{7},-\frac{1}{7},\frac{3}{7}\right)$$

$$(-1,-1,3)-\left(\frac{5}{7},-\frac{1}{7},\frac{3}{7}\right)=\left(-\frac{12}{7},-\frac{6}{7},\frac{18}{7}\right)$$

$$(1,3,0)+\left(-\frac{12}{7},-\frac{6}{7},\frac{18}{7}\right)=\left(-\frac{5}{7},\frac{15}{7},\frac{18}{7}\right).$$

$5x - y + 3z = 2$ en lösning

är $x = 1,\ y = 3,\ z = 0.$

$5 \cdot 1 - 3 + 3 \cdot 0 = 2$

Den gröna vektorn blir

$(0,2,3) - (1,3,0) = (-1,-1,3)$

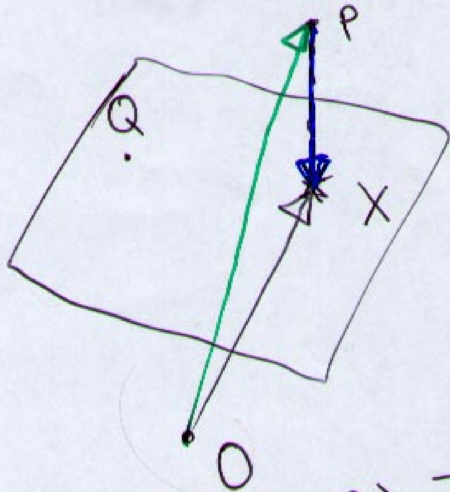
Normalen till planet $5x - y + 3z = 2$

är $(5,-1,3)$. Projektionen av

$(-1,-1,3)$ i normalens riktning

blir $\left((-1,-1,3) \cdot \frac{(5,-1,3)}{\sqrt{5^2+1^2+3^2}}\right) \frac{(5,-1,3)}{\sqrt{5^2+1^2+3^2}}$

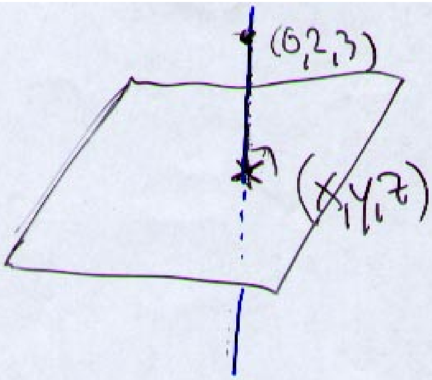
enhets
vektorn
i normalens
riktning



$$\left(\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}-\left(\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}-\left(\overrightarrow{QP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$



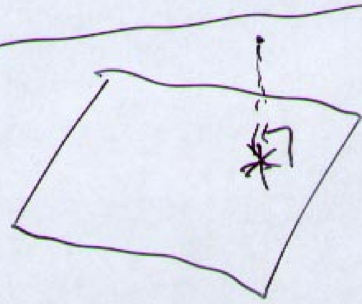
$$\begin{cases} (x,y,z) + t(5,-1,3) = (0,2,3) \\ 5x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

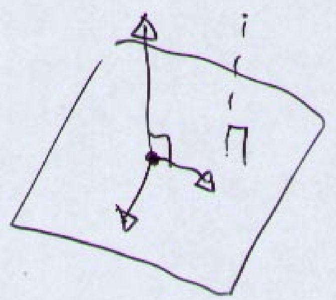
$$-5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -25 & 2 \end{array}\right) 1$$

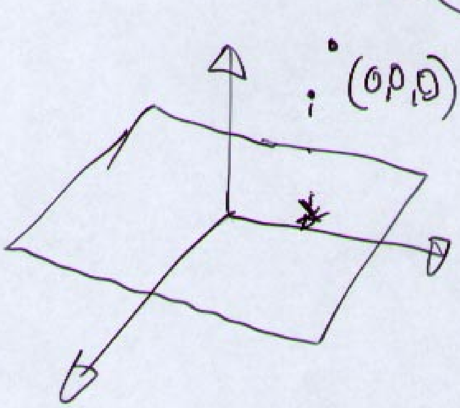
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -26 & 4 \end{array}\right) -3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & -5 \end{array}\right) -\frac{1}{35}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{array}\right) \quad -5 \quad 1 \quad -3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{7}, \frac{15}{7}, \frac{18}{7}\right).$$







projektionen
blir enkel
efter transformation

Vi söker först en ON-bas där en av basvektor pekar i normalensriktning.

$\frac{(5,-1,3)}{\sqrt{35}}$ normalen normerad.

En ortogonal vektor $\frac{(1,5,0)}{\sqrt{26}}$.

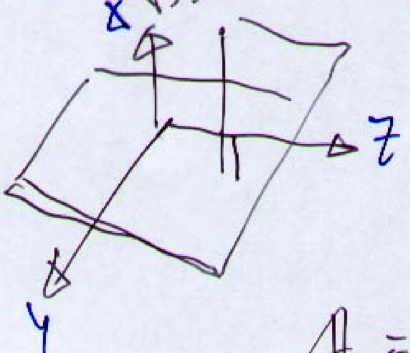
Den sista vektorn fås tex genom att ta kryssprodukten

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-15, 3, 26)$$

Vi har nu en ON-bas

$$\left\{ \frac{(5,-1,3)}{\sqrt{35}}, \frac{(1,5,0)}{\sqrt{26}}, \frac{(-15,3,26)}{\sqrt{35\cdot 26}} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_f$$

$$A_e = C A_f C^{-1} = \underset{\text{ON-matris}}{C} A_f C^T$$

$$A_e = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{15}{\sqrt{35\cdot 26}} \\ -\frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{3}{\sqrt{35\cdot 26}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} & 0 & \frac{26}{\sqrt{35\cdot 26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 \\ \frac{-15}{\sqrt{35\cdot 26}} & \frac{3}{\sqrt{35\cdot 26}} & \frac{26}{\sqrt{35\cdot 26}} \end{pmatrix}$$

$$A_e \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

Svar $\begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{18}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{15}{7} \\ \frac{18}{7} \end{pmatrix}$