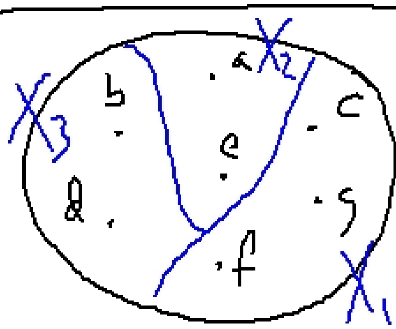
Partitioner



$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset, \quad X_1 \cap X_3 = \emptyset$$

$$X_2 \cap X_3 = \emptyset$$

Def: En partition av en mängd X är en uppdelning av X i delmängder $X_i \neq \emptyset$ så att $X = \bigcup X_i$ och $X_i \cap X_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

Ex: $\mathbb{Z} = \{\text{jämna}\} \cup \{\text{udda}\}$

Ex: $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$

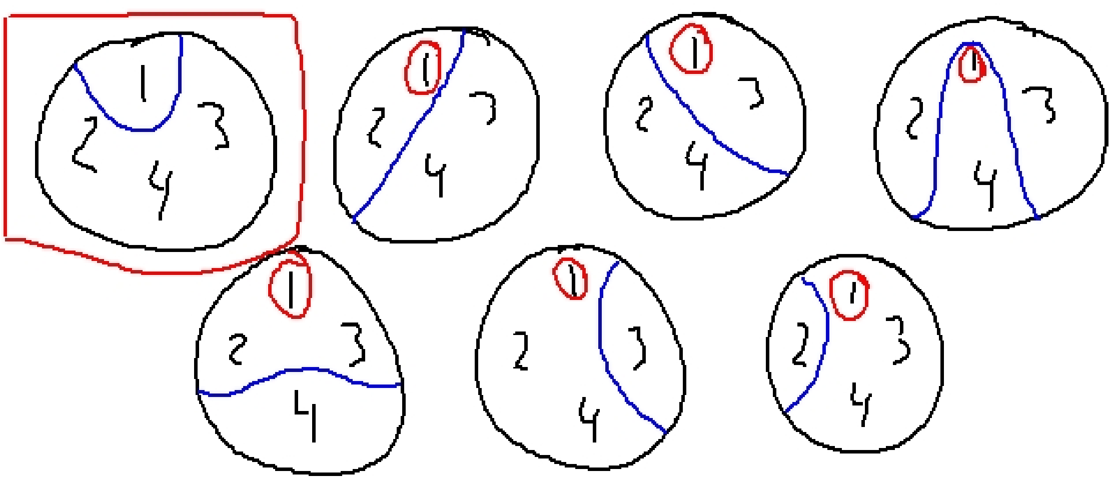
Ex: Att välja en r-delmängd ur en n-mängd X är en partition $X = R \cup S$

R: r-delmängden

S: komplementerande (n-r)-delmängden.

Låt $S(n,k)$ beteckna antalet partitioner av en n-mängd X i k st delar, $1 \leq k \leq n$. $S(n,k)$ kallas Stirlingtal.

Ex: $S(4,2) = 7 = S(3,1) + 2 \cdot S(3,2)$

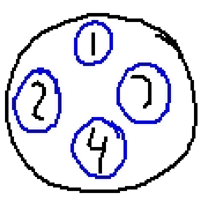


Sats: $S(n,1) = S(n,n) = 1$

$2 \le k \le n-1$: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$

Bevis: $S(n,1) = 1 \qquad X = X$

$S(n,n) = 1 \qquad X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$



Låt x vara ett element i X och dela upp partitionerna i två högar, en där $\{x\}$ ingår och en där x alltid ligger i samma delmängd som något annat element.

Partitionerna där $\{x\}$ förekommer svarar mot partitioner i $k-1$ delar av $X \setminus \{x\}$ som är en $(n-1)$-mängd. Alltså finns $S(n-1, k-1)$ st.

Om delmängden där x ingår har fler element kan vi ta bort x och få en partition i k delar av $X \setminus \{x\}$, så $S(n-1, k)$ st. Eftersom det finns k delar kan detta göras på k sätt.

$n=1$	1
$n=2$	1 1
$n=3$	1 3 1
$n=4$	1 7 6 1
$n=5$	1 15 25 10 1
$n=6$	1 31 90 65 15 1

$$S(3,2) = S(2,1) + 2\,S(2,2)$$
$$= 1 + 2 \cdot 1$$

$$S(6,3) = S(5,2) + 3 \cdot S(5,3)$$

Ekvivalensrelationer

Vi kan betrakta en partition som en klassifikation där varje klass innehåller relaterade element.

$$xRx' \iff x, x' \in X_i$$

Relationer som fås från en partition har de egenskaperna

xRx reflexiv (tex "lika gammal som")

$xRy \Rightarrow yRx$ symmetrisk (tex "att vara syskon") (ej $x<y$!)

$xRy, yRz \Rightarrow xRz$ (transitiv) (tex $x<y$) (ej tex vara vänner)

En relation med dessa tre egenskaper kallas ekvivalensrelation.

Sats: En ekvivalensrelation ger upphov till en partition i ekvivalensklasser.

$$X = \bigcup C_x = \bigcup \{x' \in X \mid x' R x\}$$

Bevis: $C_x \neq \emptyset$ för $x \in C_x$. Om $C_x \cap C_{x'} \neq \emptyset$, så finns $x'' \in C_x \cap C_{x'}$ dvs $x'' R x$ och $x'' R x'$. Men R är symmetrisk så $x R x''$ och R är transitiv så $x R x'', x'' R x' \Rightarrow x R x' \Rightarrow x \in C_{x'}$.

Pss $x' \in C_x \Rightarrow C_x = C_{x'}$.

Ex: Låt $X = \{(a,b) \mid b \neq 0 \text{ och } a,b \in \mathbb{Z}\}$

och definiera $(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

då är R en ekvivalensrelation.

Lösn: (reflexiv): $a \cdot b = ba \Rightarrow \underline{(a,b)\,R\,(a,b)}$

(symmetrisk): $(a,b)\,R\,(c,d) \Rightarrow ad = bc$

$\Leftrightarrow cb = da \Rightarrow \underline{(c,d)\,R\,(a,b)}$

(transitiv) $(a,b)\,R\,(c,d),\ (c,d)\,R\,(e,f) \Longrightarrow$

$ad = bc,\ cf = de \Rightarrow af\cancel{d} = bcf = be\cancel{d}$

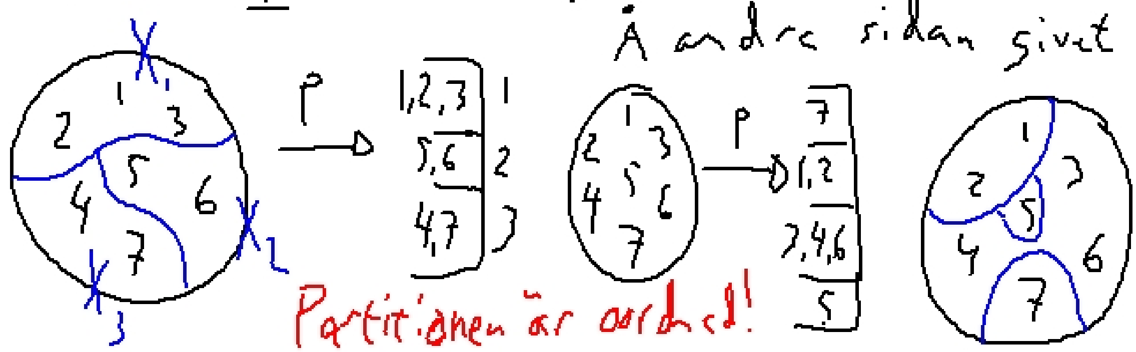
$\Longrightarrow af = be \Rightarrow \underline{(a,b)\,R\,(e,f)}$.

$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \right)$ $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$

Fördelningar

Vi har sett att en delmängd kan ses som en funktion $X \to \{0,1\}$. På liknande sätt kan en partition $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ ses som en funktion $p: X \to I$ där $p(x) = i$ om $x \in X_i$.

Å andra sidan givet p



Partitionen är ordnad!

Sats: Antalet surjektioner från en n-mängd till en k-mängd ges av $k!\,S(n,k)$

Ex: Sju bollar ska läggas i 3 lådor. Hur stor är sannolikheten att det kommer minst en boll i varje låda?

Lösn: Totala antalet möjligheter: 3^7 st

Antal möjligheter att få minst en boll $3!\,S(7,3)$

SVAR: $\dfrac{3!\,S(7,3)}{3^7} = \dfrac{6 \cdot 301}{2187} = \dfrac{1806}{2187}$.

Mer precist kan man vilja ha villkor på antalet objekt som hamnar i respektive låda. Antalet surjektioner från en n-mängd till $\mathbb{N}_k$ så att n_1 element avbildas på 1, n_2 element avbildas på 2 osv, betecknar vi med multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k} \quad (n_1+\dots+n_k=n)$$

Ex: $\binom{n}{k,\, n-k} = \binom{n}{k}$

Sats: $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

Ex: Hur många ord på 9 bokstäver kan man bilda ur ordet MATEMATIK?

$N_9 \to$

2	M
2	A
2	T
1	E
1	I
1	K

$$\binom{9}{2,2,2,1,1,1} \text{ st.} = \frac{9!}{2!2!2!1!1!1!}$$

Sats (multinomialsatsen):

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1, \dots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

där vi summerar över alla uppdelningar $n = n_1 + \dots + n_k$.

Ex: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \binom{2}{2,0,0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 +$

$$+ \binom{2}{0,2,0} x_2^2 + \binom{2}{0,0,2} x_3^2 + \binom{2}{1,1,0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 + \binom{2}{1,0,1} x_1 x_3$$

$$+ \binom{2}{0,1,1} x_2 x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$