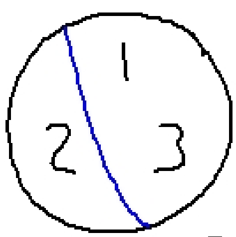
Partitioner av naturliga tal

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$



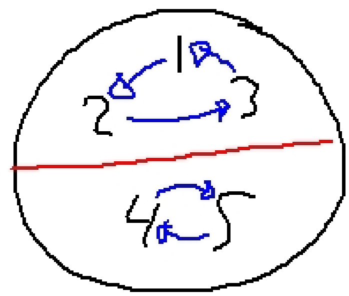
$$1 + 2 = 3$$

Ex:

5	$[5]$
$4+1$	$[1\ 4]$
$3+2$	$[2\ 3]$
$3+1+1$	$[1^2\ 3]$
$2+2+1$	$[1\ 2^2]$
$2+1+1+1$	$[1^3\ 2]$
$1+1+1+1+1$	$[1^5]$

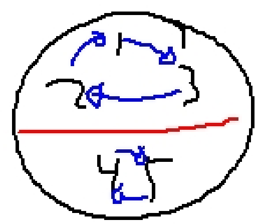
Klassifikation av permutationer

$(1\,2\,3)(4\,5)$



Cykelnotationen ger en partition.

$(1\,3\,2)(4\,5)$



ger samma partition

Partitionen svarar mot en uppdelning $5=3+2$. Vi säger att permutationen har typ $[2\,3]$.

Hur många permutationer finns det av typ $[2\ 3]$?

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5) = (2\ 3\ 1)(4\ 5)$$

$$(4\ 1\ 5)(3\ 2)$$

$$\vdots$$

Antalet blir $\dfrac{5!}{3 \cdot 2} = 20$

Om vi har flera cykler av samma längd, tex $[2^3 3^2]$: $\dfrac{12!}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 3!\,2!}$

$$(12)(34) = (34)(12)$$

Allmänt: Antalet permutationer av typ $[1^{\alpha_1} \ldots n^{\alpha_n}] = \dfrac{m!}{1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \alpha_1! \cdots \alpha_n!}$

$m = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$

Ex:

$[1^6] \quad \dfrac{6!}{1^6 \cdot 6!} = 1 \qquad [2^3] \quad \dfrac{6!}{2^3 \cdot 3!}$

$[1^4 2] \quad \dfrac{6!}{1^4 \cdot 2 \cdot 4!} = 15 \qquad [24] \quad \dfrac{6!}{2 \cdot 4}$

$[123] \quad \dfrac{6!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} = 120 \qquad [1^2 2^2] \quad \dfrac{6!}{1^2 2^2 2! 2!}$

$(12)(34)(56) \qquad (13)(24)(56)$

Def: Två permutationer $\pi, \tau \in S_n$ kallas konjugerade om det finns en permutation $\sigma \in S_n$ så att $\sigma \pi \sigma^{-1} = \tau$.

Relationen "att vara konjugerade" är en ekvivalensrelation.

(reflexiv) $id \circ \pi \circ \underbrace{id^{-1}}_{id} = \pi$

(symmetrisk) $\tau = \sigma \pi \sigma^{-1} \Rightarrow \sigma^{-1} \tau (\sigma^{-1})^{-1} = \pi$

(transitiv) $\tau = \sigma \pi \sigma^{-1}$, $\rho = \eta \tau \eta^{-1} \Rightarrow$

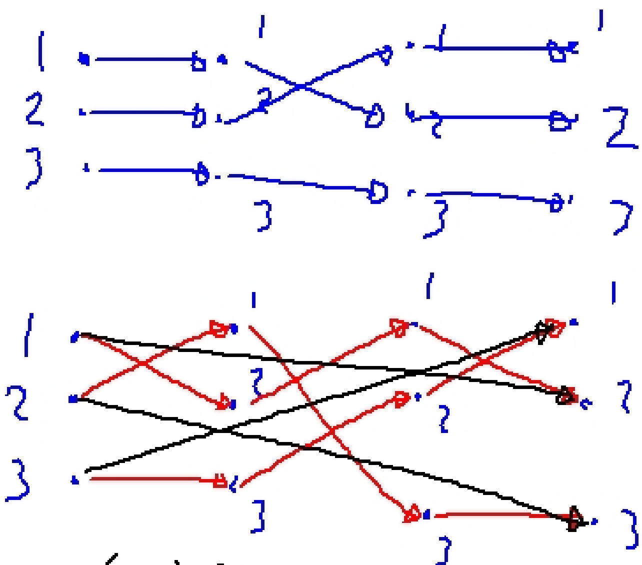
$$\rho = \eta \tau \eta^{-1} = \eta(\sigma \pi \sigma^{-1})\eta^{-1} = (\eta\sigma)\pi(\sigma^{-1}\eta^{-1}) = (\eta\sigma)\pi(\eta\sigma)^{-1}$$

Sats: Två permutationer är konjugerade om och endast om de har samma typ.

Ex: $(1\,3\,2)$ $[3]$

$(1\,2\,3)$ $[3]$

$$(1\,2)(1\,3\,2)(1\,2) = (1\,2\,3)$$



$\mathrm{id}\ \pi\ \mathrm{id} = \pi$

$(12)(3)(132) \quad (12)(3) = (123)$

bevis: Antas π, τ konjugerade

$\sigma\pi = \tau\sigma \iff \sigma \pi \sigma^{-1} = \tau$, och låt

$(a_1 \ldots a_k)$ vara en cykel i π.

Sätt $b_\ell = \sigma(a_\ell)$, $1 \le \ell \le k$, då

har vi $\sigma\pi(a_\ell) = \tau\sigma(a_\ell) = \tau(b_\ell)$

men $\sigma\pi(a_\ell) = \sigma(a_{\ell+1}) = b_{\ell+1}$ om $\ell < k$

och $\sigma\pi(a_k) = \sigma(a_1) = b_1$. Vi ser att

$(a_1 \ldots a_k)$ i π svarar mot cykeln

$(b_1 \ldots b_k)$ i τ.

$\Rightarrow$ samma typ.

$\Big(b_1 = \sigma(1) = (12)(1) = 2,\ b_2 = \sigma(2) = 1$

$b_3 = \sigma(3) = 3$

Antag nu att π, τ har samma typ.
För varje cykel $(a_1 \ldots a_k)$ i π
finns då en cykel $(b_1 \ldots b_k)$ i τ.
Låt σ definieras av $\sigma(a_\ell) = b_\ell$,
och motsvarande för övriga cykler.
Vi får $\sigma\pi\sigma^{-1}(b_\ell) = \sigma\pi(a_\ell) =$
$= \sigma(a_{\ell+1}) = b_{\ell+1}$, om $\ell < k$ och
$\sigma\pi\sigma^{-1}(b_k) = \sigma\pi(a_k) = \sigma(a_1) = b_1$. $\sigma\pi\sigma^{-1}$
fungerar som τ så de är lika.

$(1\,3\,2), (1\,2\,3)$ $\quad \sigma(1)=1, \sigma(2)=3, \sigma(3)=2$

$(2\,3\,1)$

$$(23)(132)(23) = (123) \quad ?$$

σ $\quad\quad$ $\sigma^{-1} = \sigma$

$(12)(3)$ och $(23)(1)$ har samma typ.

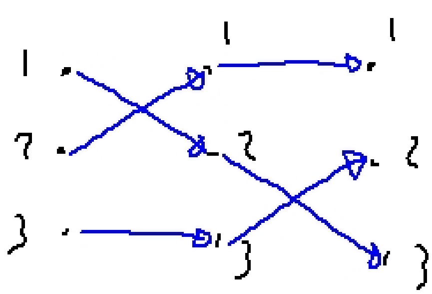
$\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$

$\sigma = (1\,2\,3) \quad \sigma^{-1} = (3\,2\,1) = (1\,3\,2)$

$$(123)(12)(3)(132) = (1)(23)$$

Transpositioner

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{kan delas upp i} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$



$$(1\,3\,2) = (2\,3)(1\,2)$$

$$(1\,3\,5\,2\,4) = (1\,4)(1\,2)(1\,5)(1\,3)$$

Uppdelningen är inte unik

$$(135)(24) = (15)(13)(24)$$
$$= (15)(14)(34)(24)(12)$$

Ex: $(12)(132) = (13)(2)$

$$(13)(132) = (1)(23)$$

$$(12)(13) = (132)$$
$$(12)(23) = (123)$$

Om $\tau = (ab)$ och $\pi = (ax\ldots yb\ldots z)$

$$\tau\pi = (ax\ldots y)(b\ldots z)$$

och om $\sigma = (ax\ldots y)(b\ldots z)$

$\tau\sigma = (ax\ldots yb\ldots z)$

Antingen ökar antalet cykler med ett eller så minskar det med ett när vi multiplicierar med en transposition.

Sats: Alla uppdelningar av en permutation π i transpositioner är antingen alla udda eller alla jämna.

Antag att $\pi = \tau_r \dots \tau_1$ och $\pi = \sigma_{r'} \dots \sigma_1$ där τ_i och σ_j transpositioner. Antalet cykler i τ_1 är

$$\underbrace{C}_{\text{antalet cykler}}(\tau_1) = \underbrace{1}_{2\text{-cykel}} + \underbrace{(n-2)}_{1\text{-cykler}}$$

och övriga transpositioner höjer eller sänker antalet cykler med 1; låt säga g st höjer och h st sänker. Det ger $C(\pi) = g - h + 1 + (n-2)$ och $g + h = r - 1$. Det ger

$$r = g + h + 1 = 2g + n - C(\pi).$$

På samma sätt får vi

$$r' = 2g' + n - c(\pi)$$

$$\Rightarrow r - r' = 2g - 2g' = 2(g - g')$$

$$\Rightarrow 2 \mid r - r'.$$

<u>Def</u>: En permutation med alla uppdelningar jämna kallas jämn och en där alla uppdelningar är i ett udda antal kallas udda.

π jämn: $\operatorname{sgn}\pi = 1$, π udda: $\operatorname{sgn}\pi = -1$.

Ex: Visa att det är omöjligt att komma från 1. till 2.

1.

A	E	I
O	U	Y
R	T	

2.

Y	O	U
A	R	E
I	T	

Lösn: Ett drag svarar mot en transposition (X ▢).
För att den tomma rutan ska komma tillbaka till utgångspunkten måste antalet förflyttningar vara jämnt. (antalet uppåt = # nedåt, # åt V = # åt H)
Men permutationen (AYEO)(IUR)(T)(▢) är udda för cykler av jämn längd är udda och cykler av udda längd är jämna.