Föreläsning 2, sid 1

$\mathbb{N}$ = mängden av naturliga tal $= \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = mängden av heltal $= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

I1: Om $a, b \in \mathbb{Z}$ så

$\underline{a+b} \in \mathbb{Z}$, $\underline{a \cdot b} \in \mathbb{Z}$

(samma gäller för $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$)

(men ej för mängden $\{0,1,2\}$)

I2: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$

$2 \cdot 3 = 3+3$

$3 \cdot 2 = 2+2+2$

I3: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$(5+1)+3 = 5+(1+3)$

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

I4: $a+0=a$ (gäller ej i $\mathbb{N}$) $\quad a\cdot 1 = a$

I5: $a\cdot(b+c) = ab+ac$

$2\,(3+1) = 2\,3 + 2\cdot 1$

I6: (additiv invers)

Till varje element $a \in \mathbb{Z}$ så finns det ett element $-a \in \mathbb{Z}$ så att $a + (-a) = 0$

(multiplikativ invers saknas!) t ex $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

I7: Om $a \neq 0$ så ger $ab = ac$ att $b = c$.

Ex: $a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot 0 \overset{I4}{=} a \cdot (0+0) \overset{I5}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$0 = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a\, 0) + (-a\, 0)$$

$$\overset{I3}{=} a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \overset{I6}{=} a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$$

Ex: (den additiva inversen är unik) Antag att $a+b=0$ och $a+c=0$ då får vi

$$b = b+0 = b+(a+c) = (b+a)+c = 0+c = c$$

Föreläsning 2, sid 6

Ordning

I8: $a \leq a$ $(a \not< a)$

$(a \leq b$, $a < b$ eller $a = b)$

I9: $a \leq b$ och $b \leq a$

$\Rightarrow a = b$

I10. $a \leq b$ och $b \leq c$

$\Rightarrow a \leq c$

(gäller även $<$)

I11: $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$

I12: $a \le b$ och $0 \le c \Rightarrow$
$a \cdot c \le b \cdot c$
($a < b$ och $0 < c \Rightarrow$
$a \cdot c < b c$)

I13: (välordning)

Om $X \subseteq \mathbb{Z}$, $X \ne \emptyset$ (icke-tom)

delmängd

och X nedåt begränsad

så har X ett minsta element.

Ex: $\mathbb{N}$, 1 minsta element

$\mathbb{N}_0$, 0 —— " ——

$\mathbb{Z}$ ej nedåt begränsad saknar minsta element.

$(0,1]$ saknar minsta element trots att den är nedåt begränsad.

rekursion

Fibonaccitalen:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Bevis av att tal n är definierade
Antas att det inte vore ~~samt~~
för alla $n \in \mathbb{N}$. Mängden S
av tal n sådana att u_n ej är
definierad.

$S \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ och vi har antagit att S ej är tom. Då $S \subseteq \mathbb{N}$ är den automatiskt nedåt begränsad så IB säger att S har ett minsta element, m. Alltså u_m ej definierad men u_k definierad för alla $k < m$. Men

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

och u_{n-1} och u_{n-2} definierade så u_n definierad.

$$u_1 = 1 \qquad u_n = n \cdot u_{n-1}$$

Ex: $n!$. $\quad 1! = 1, \quad n! = n(n-1)!$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1! = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Ex. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k = n + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$$u_n \qquad u_1 \qquad u_n = n + u_{n-1}$$

Induktion

Ex. $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ind bas) $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ OK

sant för $n=m-1$ (ind hyp) Antas sant för $n=p$,

$$1+\ldots+p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$\Downarrow$

sant för $n=m$ (ind påst) då gäller det även för $n=p+1$.

(bevis av ind påst)

$$1+2+\ldots+p+(p+1) = \frac{p(p+1)}{2}+(p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

enligt induktionsprincipen gäller det för alla $n \geq 1$

Bevis med välordningsaxiomet.

Antag att påståendet inte gäller för alla n och bilda mängden, S, av de n för vilka påståendet är falskt. Vi har antagit att S icketom och som delmängd av de naturliga talen är den nedåt begränsad.

Enligt välordningsaxiomet JIB har S ett minsta element, m. Då är påståendet sant $(m-1 \notin S)$ för $m-1$ $(m-1<m)$ ($m>1$ följer av ind basen) så induktionssteget visar att det även är sant för m. $\Longrightarrow$ S tom.

$\Longrightarrow$ Påståendet är sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Föreläsning 2, sid 15