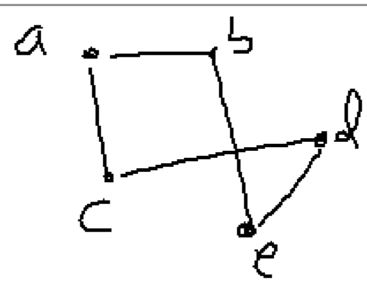
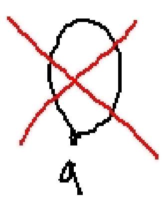
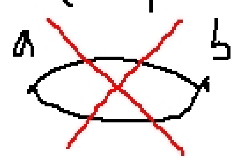


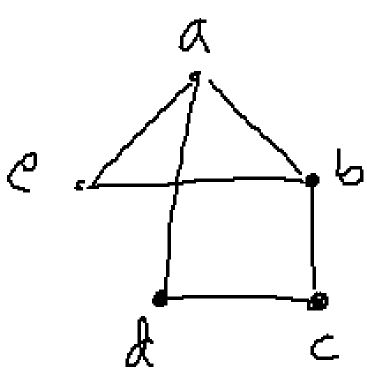
$V = \{a,b,c,d,e\}$

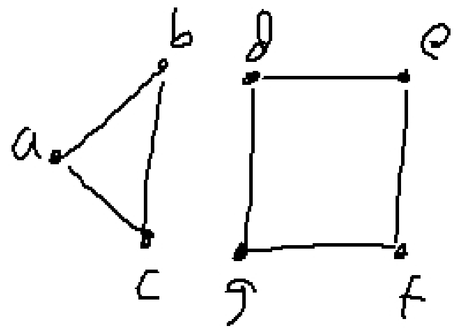
$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{d,e\}\}$

Def: En graf G består av en mängd V av hörn och en mängd, E, av 2-delmängder till V. Elementen i E kallar vi kanter. $G = (V, E)$









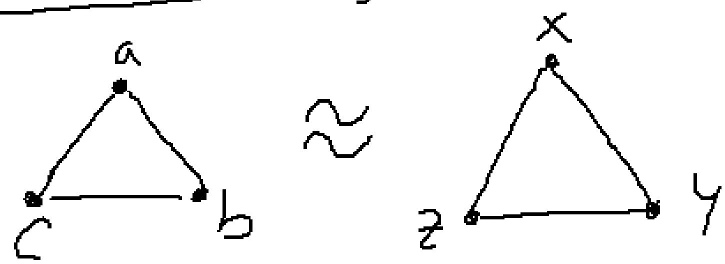
Granntabeller

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	b
e	e			

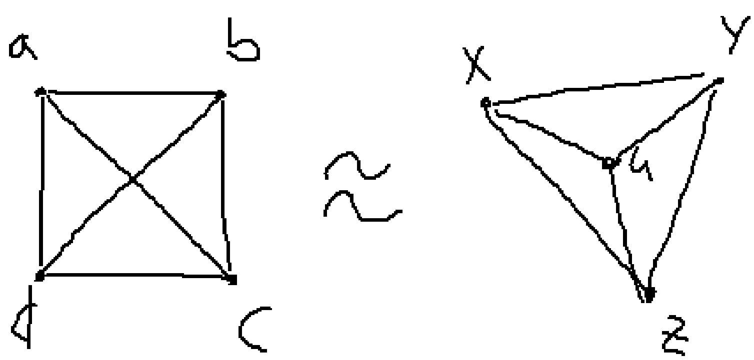
a	b	c	d	e	f	g
b	a	a	e	d	e	d
c	c	b	g	f	g	f

Isomorfa grafer

1.



2.

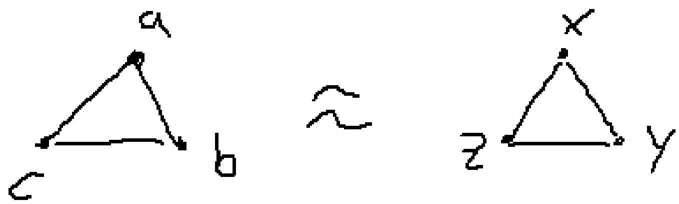


Def: Två grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ kalla isomorfa om det finns en bijektion $\alpha : V_1 \to V_2$ som ger en bijektion $\beta : E_1 \to E_2$ genom

$$\beta(\{x, y\}) = \{\alpha(x), \alpha(y)\}.$$

(Det senare kan kollas med granntabellen)

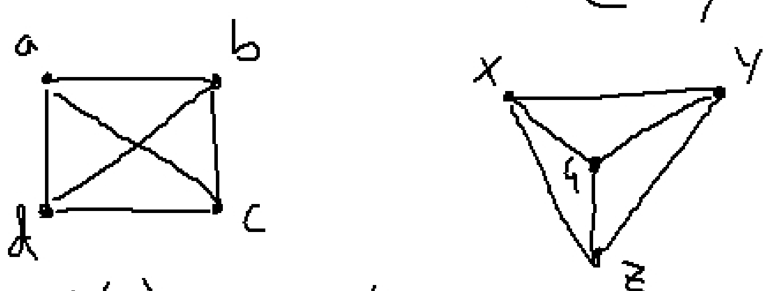
Ex:



$\alpha(a) = x, \ \alpha(b) = y, \ \alpha(c) = z.$

a	b	c
b	a	a
c	c	b

x	y	z
y	x	x
z	z	y



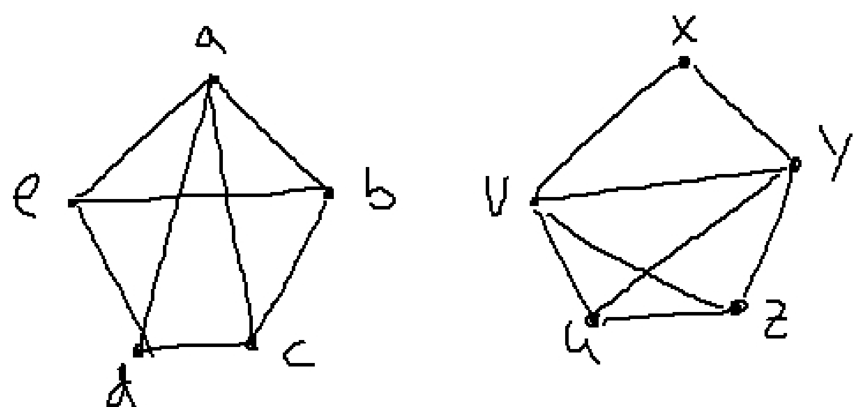
$\alpha(a) = x, \ \alpha(b) = y, \ \alpha(c) = z, \ \alpha(d) = u$

a	b	c	d
b	a	a	a
c	c	b	b
d	d	d	c

=

x	y	z	u
y	x	x	x
z	z	y	y
u	u	u	z

Ex:



$\delta(a)=4$
$\delta(b)=3$
$\delta(c)=3$
$\delta(d)=3$
$\delta(e)=3$

a	b	c	d	e
b	a	a	a	a
c	c	b	c	b
d	e	d	e	d
e				

$\not\cong$

x	y	z	u	v
y	x	y	y	x
v	z	u	z	y
	u	v	v	z
	v			u

inget hörn har bara tre kanter

bara två kanter

$\delta(x)=2$
$\delta(y)=4$
$\delta(z)=3$
$\delta(u)=3$
$\delta(v)=4$

Valens

Vi definierar ett hörn v:s valens $\delta(v)$ som antalet kanter som hör till v.

Sats: För $G=(V,E)$ gäller $\sum_{v\in V}\delta(v)=2|E|$

Om $\delta(v)$ är jämnt tal då säger vi att v är jämnt, annars udda.

Summan i satsen kan delas upp som

$$\sum_{v \text{ jämnt}}\delta(v)+\sum_{v \text{ udda}}\delta(v)=2|E|$$

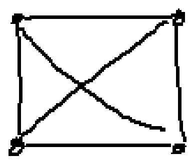
Efter $\sum_{v \text{ jämnt}} \delta(v)$ är en summa av jämna tal så är $\sum_{v \text{ jämnt}} \delta(v)$ ett jämnt tal. Men nu är då

$$\sum_{v \text{ udda}} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \text{ jämnt}} \delta(v)$$

vilket betyder $\sum_{v \text{ udda}} \delta(v)$ är ett jämnt tal. Då $\sum_{v \text{ udda}} \delta(v)$ är en summa av udda tal måste antalet termer alltså vara jämnt, dvs antalet udda hörn är jämnt.

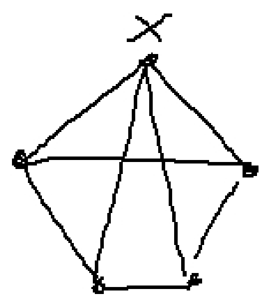
En graf där alla hörnen har samma valens kallas reguljär.

Ex:



alla hörn $\delta(v)=3$

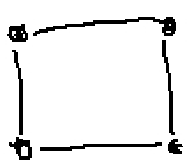
reguljär



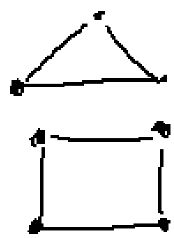
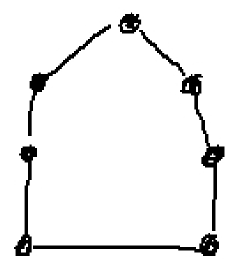
ej reguljär

$\delta(x)=4$

övriga $\delta(v)=3$



Ex:

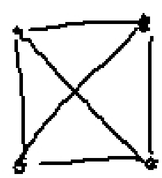
 $\not\cong$ 

$\delta(v)=2$ $\qquad$ $\delta(v)=2$

<u>Def</u>: Om $G=(V,E)$ är en graf kan vi bilda dess komplement $\overline{G}=(V,F)$ där F består av alla 2-delmängder som inte finns i E.

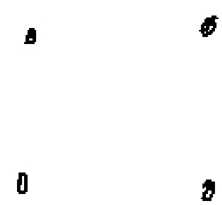
Om $|V|=n$ och valenserna i G är $d_1, \dots, d_n$ så blir valenserna i $\overline{G}$: $n-1-d_1, n-1-d_2, \dots, n-1-d_n$. Speciellt om G är reguljär så blir $\overline{G}$ reguljär.

Ex: G

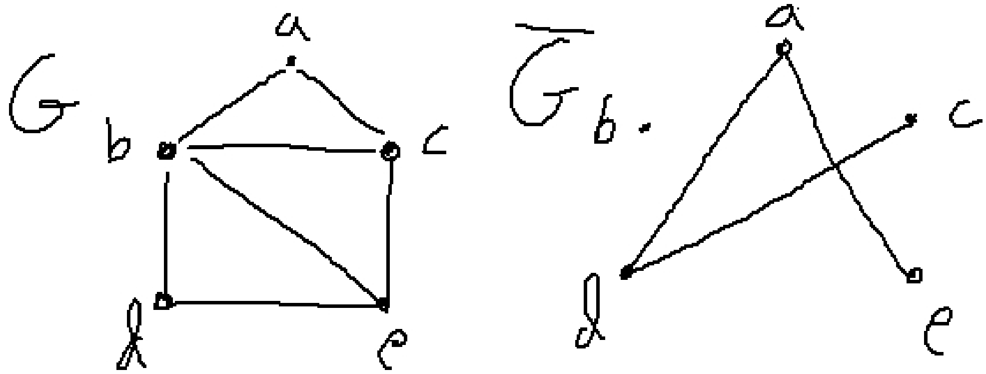


$\delta(v)=3$

$\overline{G}$

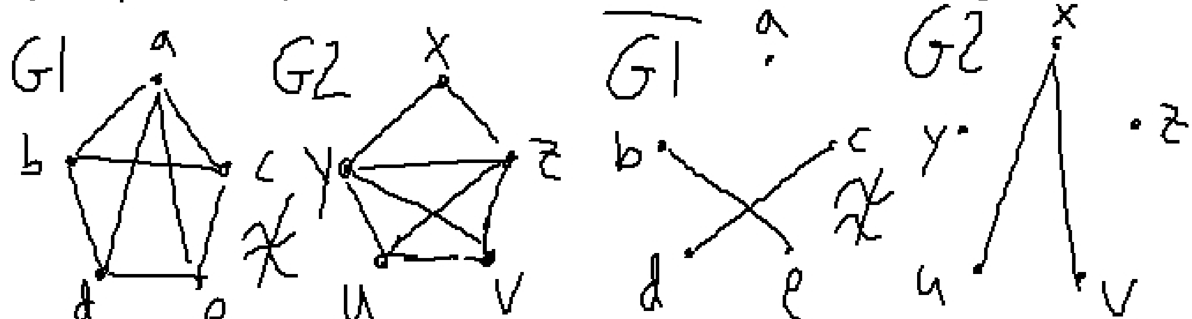


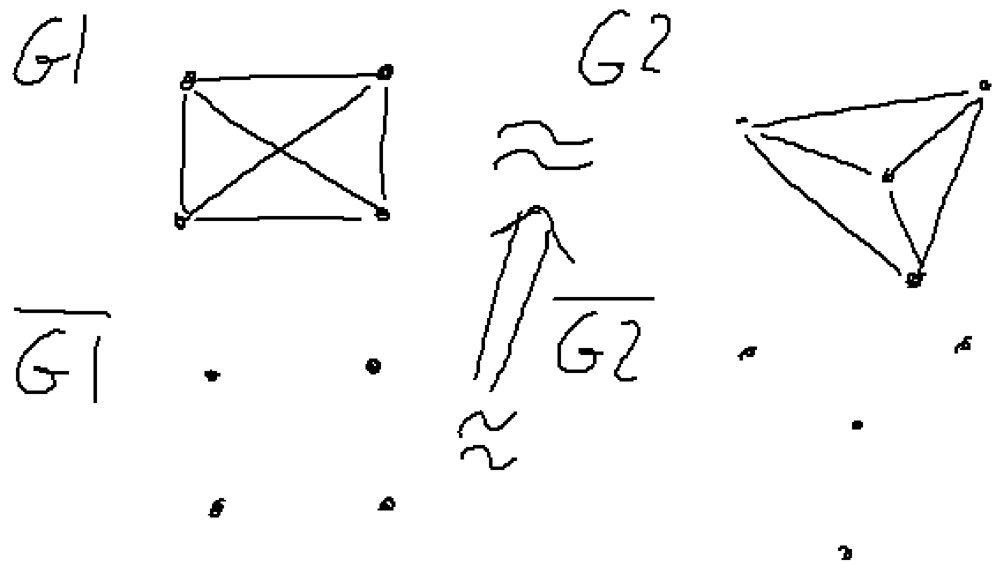
$\delta(v)=4-1-3=0$



Två grafer är isomorfa precis då komplementen är isomorfa.

Ex:

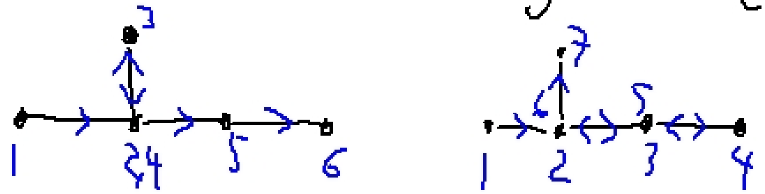



G1
G2
≈
≈
G1
G2

Def: En vandring (walk) är en följd av hörn $v_1, \ldots, v_k$ så att v_i och v_{i+1} är grannar (dvs det finns en kant v_i —— v_{i+1})

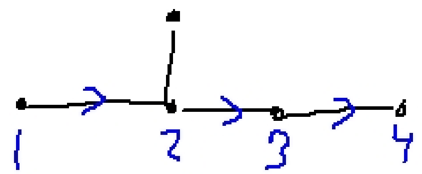
Om alla hörnen är olika kallas vandringen en stig (path)

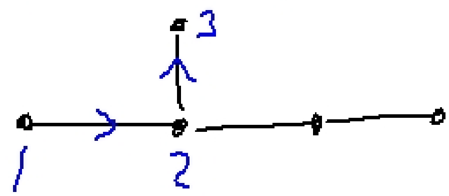
Ex:



vandringar

Ex:



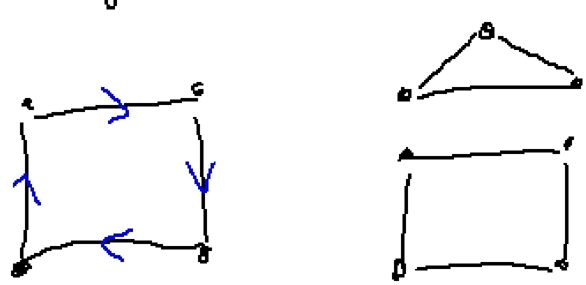


Om det finns en stig från x till y finns det förstås också en stig från y till x. Vi kan sätta ihop stigar så det är klart att relationen $x \sim y$ $\iff$ "om det finns en stig från x till y" är en ekvivalensrelation.

Ekvivalensrelationen ger en partition av hörnen

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k \qquad V_i \cap V_j = \emptyset$$

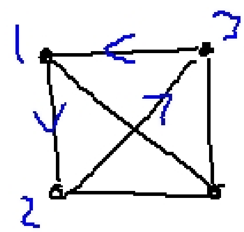
och en uppdelning av grafen i komponenter.



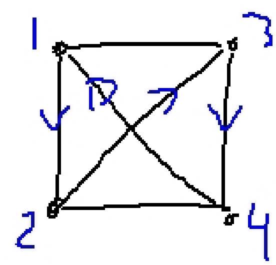
Det finns ingen stig mellan triangeln och fyrkanten.

En vandring där hörnen är olika så när som på att $v_1 = v_k$ kallas en cykel.

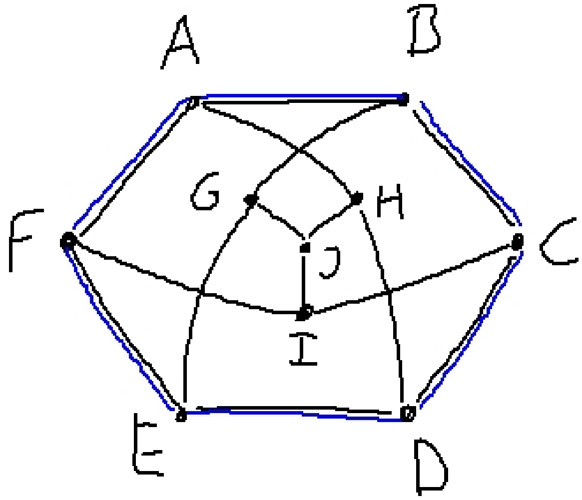
Ex:

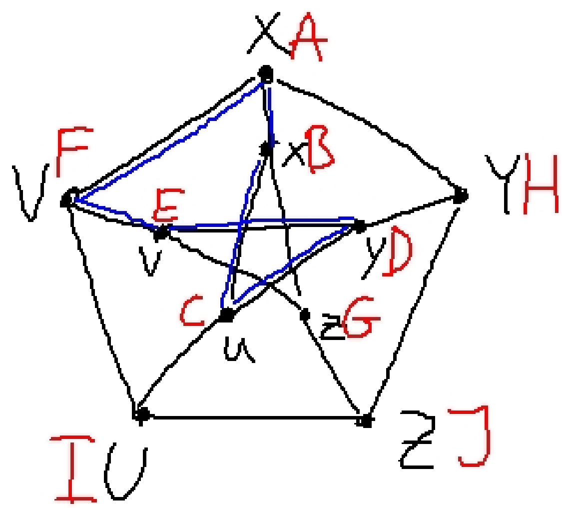


3-cykel



4-cykel





Petersens graf

Visa att graferna är isomorfa.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
B	A	B	C	D	A	B	A	C	G
F	C	D	E	F	E	E	D	F	H
H	G	I	H	G	I	J	J	J	I

X	x	u	y	v	V	z	Y	U	Z
x	X	x	u	y	X	x	X	u	z
V	u	y	v	V	v	v	y	V	Y
Y	y	U	Y	z	U	Z	Z	Z	U