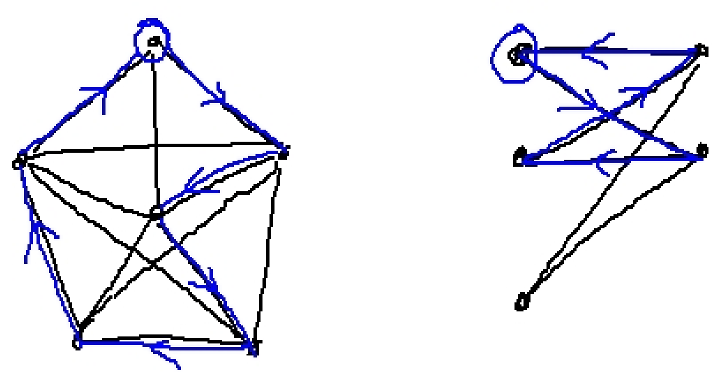
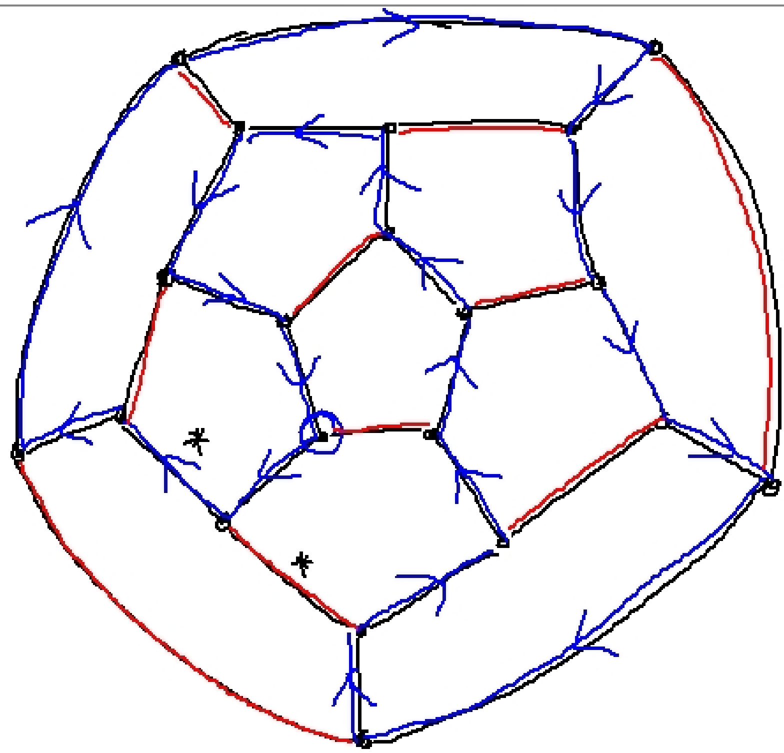
En cykel som går genom samtliga hörn kallas en Hamiltoncykel.



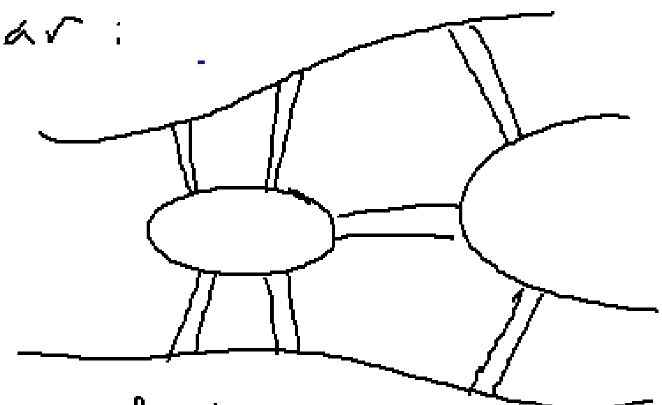
finns ingen Hamiltoncykel

Ex: Hamilton marknadsförde följande spel: På en kloss uppbyggd av tolv regelbundna femhörningar, fanns i varje hörn utsatt namnet på en stad och kanterna var vägar mellan städerna. Uppgiften var att försöka hitta en rutt som passerar varje stad, men bara en gång, och till slut tog en tillbaka till utgångspunkten.

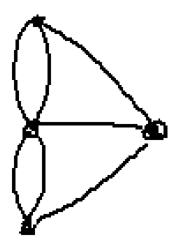
Lösningen är att hitta en Hamiltoncykel.



Königsbergsbroar:
(Kaliningrad)



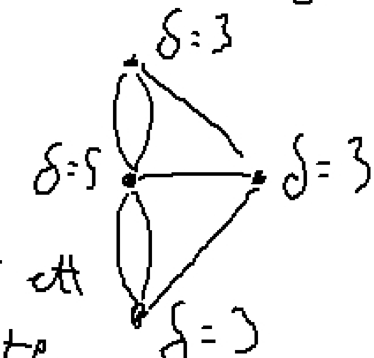
Söndagsnöje i stan var att ta en promenad, med början och slut på samma ställe, så att varje bro passeras precis en gång. Ingen hade lyckats när Euler visade att det är omöjligt.



multigraf

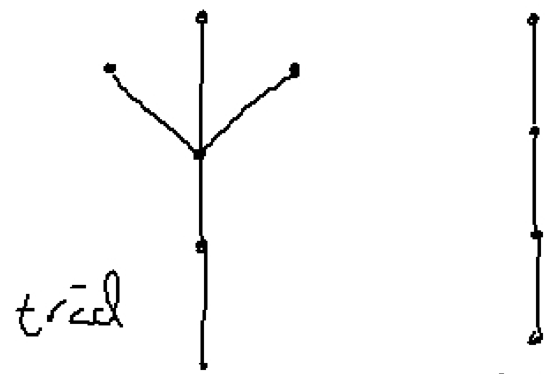
Eulervandring: varje kant används precis en gång men hörnen får användas flera gånger.
Problemet är alltså ekvivalent med att undersöka om det finns en Eulercykel i multigrafen.

Lösn: Eftersom vi bara får använda kanterna en gång måste vi använda två kanter varje gång vi passerar ett hörn så i en Eulercykel måste alla hörn vara jämna.

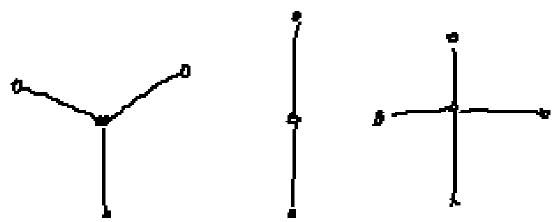


Om Eulervandringen inte är en cykel måste vi börja och sluta i udda hörn.

Träd:



En sammanhängande graf (en komponent) utan cykler kallas ett träd.
En graf utan cykler kalla en skog eftersom dess komponenter är träd.

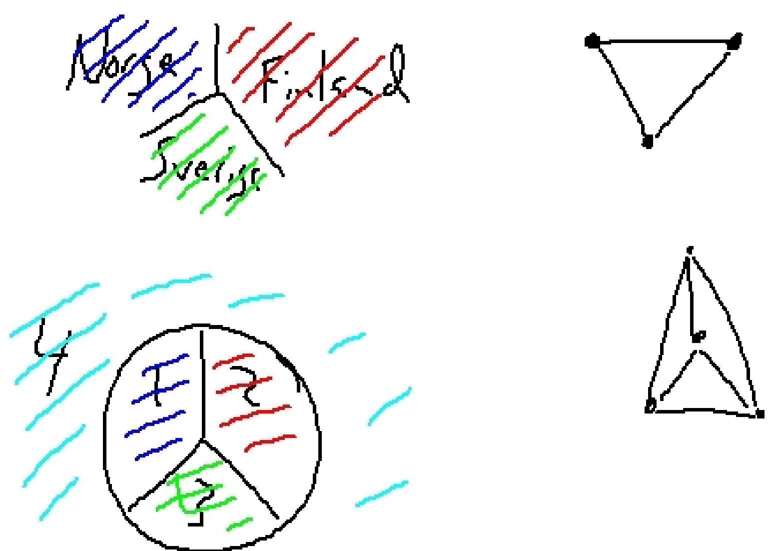
Ex: 

skog

Sats: För ett träd $T=(V,E)$ gäller att varje par av hörn kan förbindas med en unik stig. Om vi tar bort en kant från T får vi en skog med två träd. Vidare gäller $|E|=|V|-1$

Hörnfärgning

Fyrfärgsproblemet:

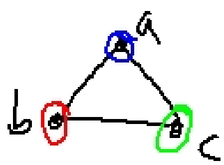


Det krävs fyra färger och det är också tillräckligt.

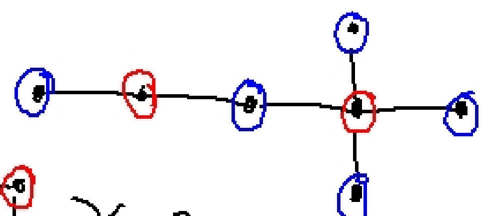
Def: En hörnfärgning av $G=(V,E)$ är en funktion $c: V \to \{\text{färger}\}$ så att $c(x) \neq c(y)$ om $\{x,y\} \in E$.

Det kromatiska talet $\chi(G)$ är det minsta antalet färger man kan använda för att färga G.

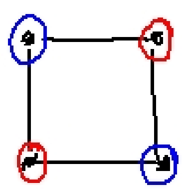
Ex:



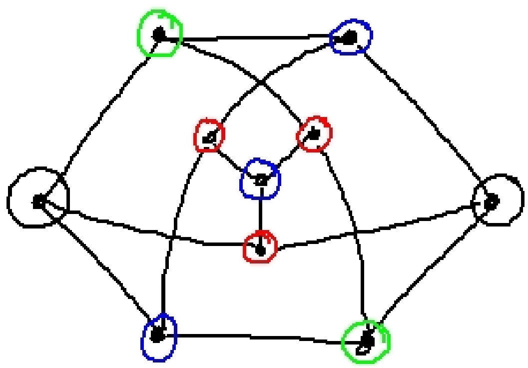
$\chi = 3$



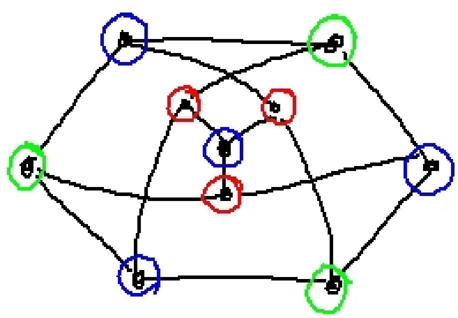
$\chi = 2$



$\chi = 2$



4 färger

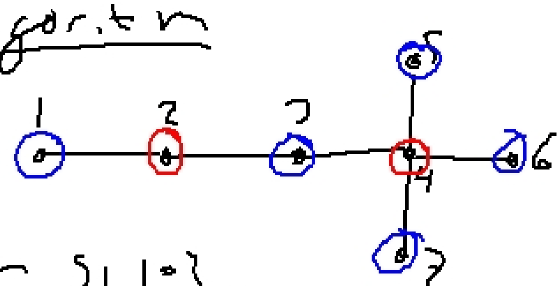


3 färger

$\chi = 3$

Föreläsning 23, sid 11

Algoritm



$S_2 = \{\text{blå}\}$ ← färg hos ettan

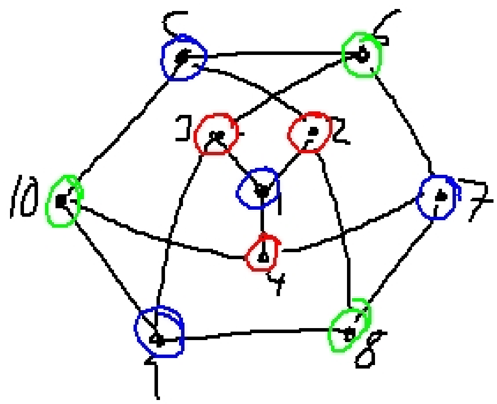
$S_3 = \{\text{röd}\}$ ← färg hos tvåan

$S_4 = \{\text{blå}\}$ ← färg hos trean

$S_5 = \{\text{röd}\}$

$S_6 = \{\text{röd}\}$

$S_7 = \{\text{röd}\}$



$S_2 = \{\text{blå}\} = S_3 = S_4$

$S_5 = \{\text{röd}\}$

$S_6 = \{\text{blå}, \text{röd}\}$

$S_7 = \{\text{röd}, \text{grön}\}$

$S_8 = \{\text{blå}, \text{röd}\}$

$S_9 = \{\text{röd}, \text{grön}\}$

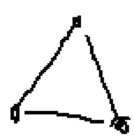
$S_{10} = \{\text{blå}, \text{röd}\}$

Sats: Om G är en graf med högsta valens k så gäller

i) $\chi(G) \leq k+1$

ii) Om G är sammanhängande men inte reguljär, $\chi(G) \leq k$.

bevis: i) I algoritmen väljer vi färg efter färgen hos tidigare grannar. och eftersom det finns högst k st ~~sådana~~ sådana behövs maximalt $k+1$ st färger.

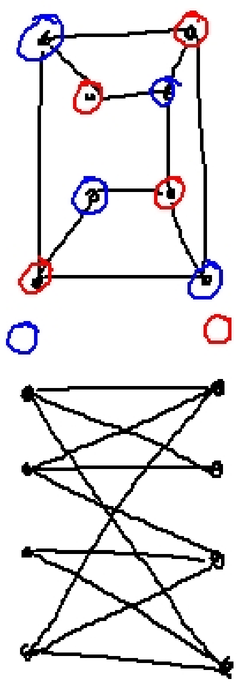
ii)  valens 2 men $\chi = 3$.

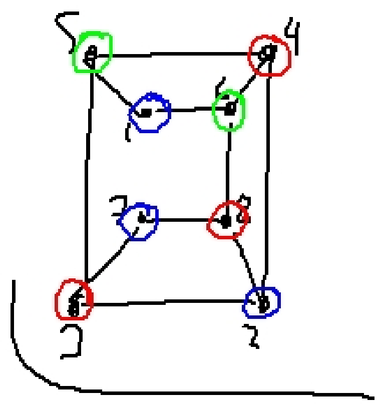
Det förklarar varför reguljära grafer måste uteslutas.

Då vi antagit att grafen ej är reguljär så finns något hörn, v_n, med valens $\leq k-1$. Numrera sedan v_n's grannar $v_{n-1}, \dots, v_{n-r}$ $(r \leq k-1)$
$r = \delta(v_n)$

Förutom v_n har dessa högst $k-1$ grannar, som vi ordnar på samma sätt. Vi har så ordnat hörnen på så vis att varje hörn högst har $k-1$ st tidigare grannar. Algoritmen kräver därför högst k färger.

Ex :





Färgningen ger en partition av hörnen.
En graf med $\chi(G)=2$ kallas därför bipartit.