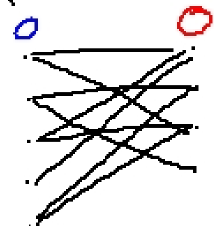
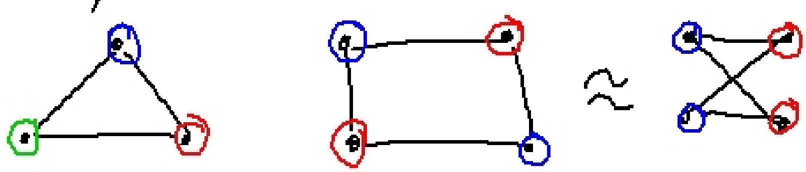
En bipartit graf är en graf med $\chi(G) = 2$.



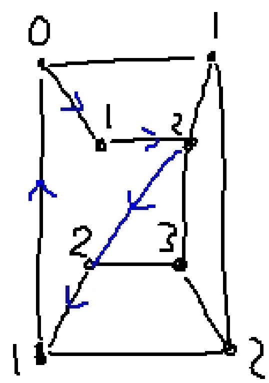
Sats: En graf är bipartit om och endast om den inte har någon cykel av udda längd. (>1)

Ex:



bevis: En udda cykel kräver 3 färger Övn 8.6.1 iii) så om vi har en udda cykel kan grafen ej vara bipartit.

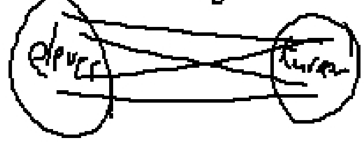
Antag att G saknar udda cykler.
Vi kan anta att G är sammanhängande.
Vi börjar i något hörn och
så numrerar vi övriga efter avstånd
(tidigare hörn numreras ej)



Poängen är att hörn på
udda avstånd bara kan ha
hörn på jämnt avstånd
som grannar och omvänt.
För om x och y båda är på
jämnt avstånd och {x,y} vore en kant
så skulle 0...xy...0 vara en udda cykel.

Relationer

En relation R mellan objekt i mängderna X, Y svarar mot en delmängd av $X \times Y$.
(tidigare har vi tittat på relationer i $X \times X$, tex ekvivalensrelationer)
Antag att $X \cap Y = \emptyset$. tex: elever $\leftrightarrow$ kurser.
Då $X \cap Y = \emptyset$ kan vi betrakta relationen som en bipartit graf.

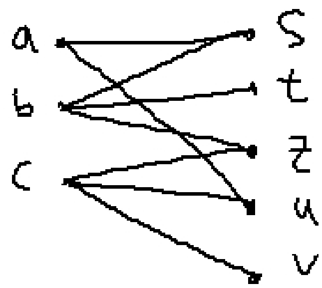


Sats: Låt $G=(X\cup Y, E)$ vara en bipartit graf då gäller

$$\sum_{x\in X}\delta(x)=\sum_{y\in Y}\delta(y)=|E|$$

Ex: $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{s,t,z,u,v\}$

	s	t	z	u	v
a	•			•	
b	•	•	•		
c			•	•	•



$J(\{a\})=\{s,u\}$

$J(\{a,c\})=$
$=\{s,z,u,v\}$

$$\sum_{x\in X}\delta(x)=2+3+3=8 \qquad \sum_{y\in Y}\delta(y)=2+1+2+2+1$$
$$=8$$

Ex: Antag att X är en mängd personer och Y är en mängd jobb, så att varje person är kvalificerad för k st jobb och det finns k personer kvalificerade för vart och ett av jobben. Visa att

i) antalet personer = antalet jobb

ii) givet en n-delmängd $A \subseteq X$ så finns minst n jobb till vilka det finns någon i A som är kvalificerad.

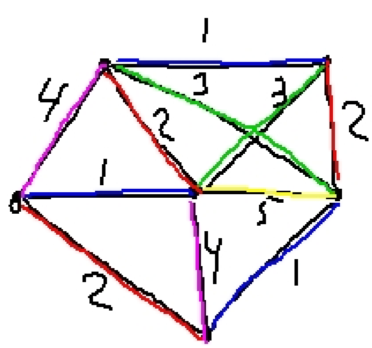
Lösn: $\sum_{x \in X} \delta(x) = k|X| = \sum_{y \in Y} \delta(y) = k|Y| \Rightarrow |X| = |Y|$.

ii) Låt $J(A) = \{y \in Y ;\ \{x,y\} \in E$ för något $x \in A\}$. Antalet kanter som utgår från hörnen i A är $k|A| = kn$ st. Per definition har alla dessa kanter hörn i $J(A)$ så $kn \leq k|J(A)| \Rightarrow |J(A)| \geq n$.

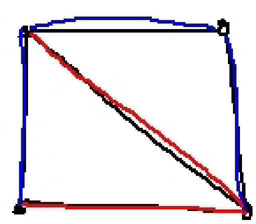
Kantfärgning

Def: Låt G vara en graf (V,E).
Då är en kantfärgning av G
en funktion $c: E \to \{\text{färger}\}$
så att $c(\{x,y\}) \neq c(\{x,z\})$

Ex:

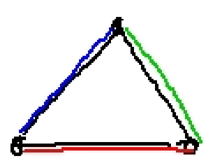


kantfärgning



ingen kantfärgning

Eftersom alla kanter som utgår från ett hörn måste färgas olika krävs det minst δ_{max} antal färger. I allmänhet behövs det fler färger än så



$\delta_{max} = 2$ men det krävs 3 färger.

För bipartita grafer räcker det dock alltid med δ_{max} antal färger.

Sats: Om $G=(X \cup Y, E)$ är en bipartit graf så är det minimala antalet färger som krävs för att kantfärga G lika med δ_{max}.

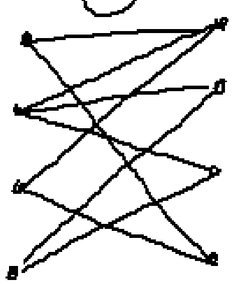
bevis: Induktion över $|E|$.

(Ind bas)  $\delta_{max}=1$, $|E|=1$

(Ind hyp) Antag att påståendet gäller för grafer med $n-1$ st kanter

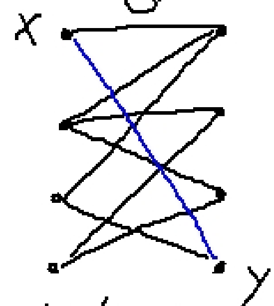
(Ind påst) då gäller det även för grafer med n st kanter.

G

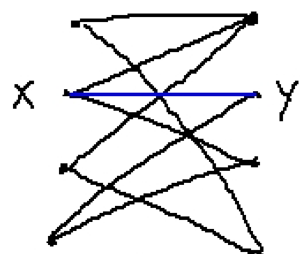


ta bort en kant från G

G'



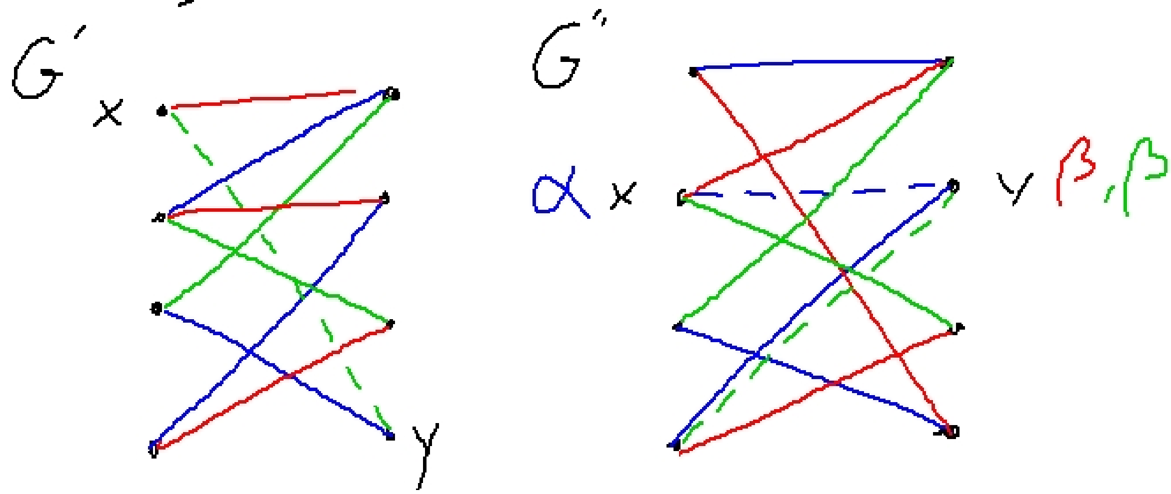
G''

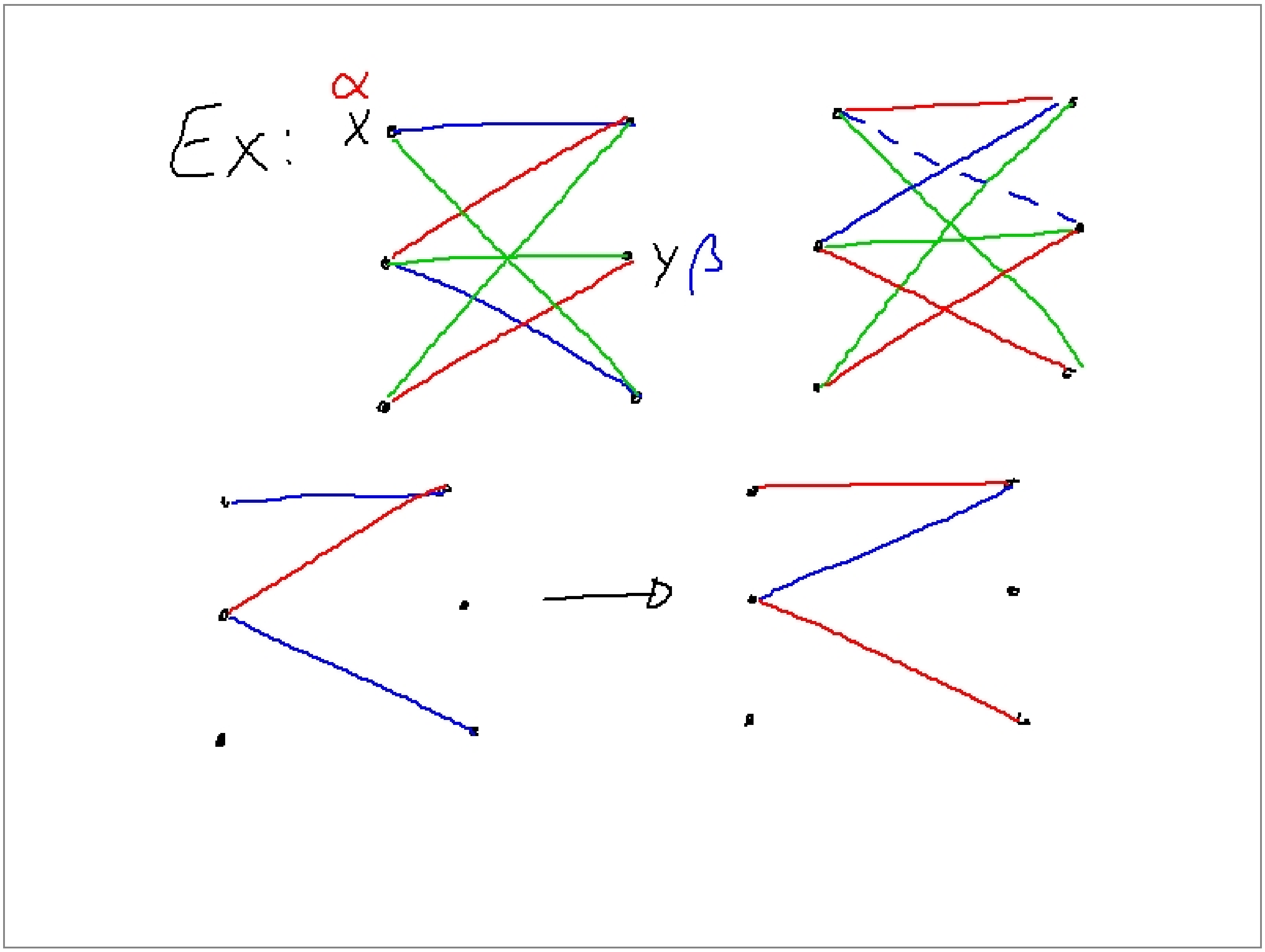


9 kanter $\qquad |E'| = 8 \qquad |E''| = 8$

$\delta_{max} = 3 \qquad \delta_{G',max} = 3 \qquad \delta_{G'',max} = 3$

Enligt induktionsantagandet finns en kantfärgning av G' och G''. I bägge fallen har vi $\delta_{G'}(x) = \delta_G(x) - 1$ och $\delta_{G''}(x) = \delta_G(x) - 1$. Det finns alltså en färg, α, som ej används i x och någon färg, β, som inte används vid y. Om α kan väljas lika med β är allt bra och vi kan lägga till kanten med den färgen.




Ex:
α
X
Y β