Tillämpning på latinska kvadrater

Exempel på en latinsk kvadrat

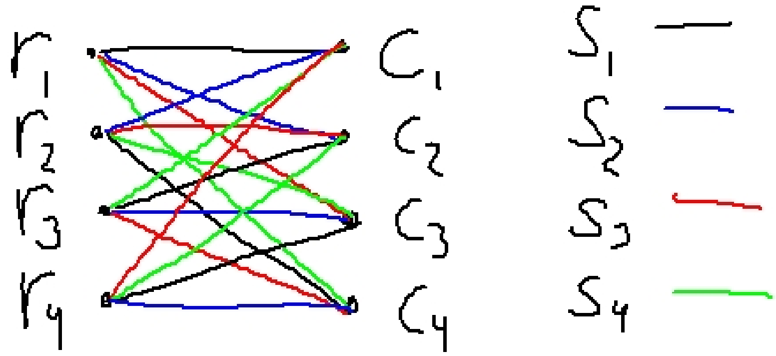
A	B	C	D
B	C	D	A
D	A	B	C
C	D	A	B

bokstäverna förekommer precis en gång i varje rad och kolumn.

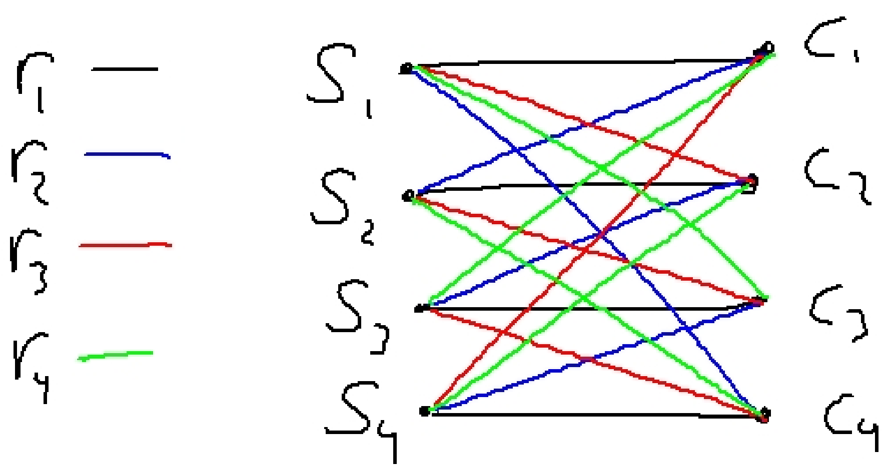
(Grupptabeller är alltid latinska kvadrater)

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	S_1	S_2	S_3	S_4
r_2	S_2	S_3	S_4	S_1
r_3	S_4	S_1	S_2	S_3
r_4	S_3	S_4	S_1	S_2

Vi kan också se detta som en kant färgning av en bipartit graf.



Ett alternativt sätt att se på den sista grafen är



Med det här synsättet kan vi fylla i rader i en latinsk kvadrat med hjälp av kantfärgning.

Ex: Utvidga

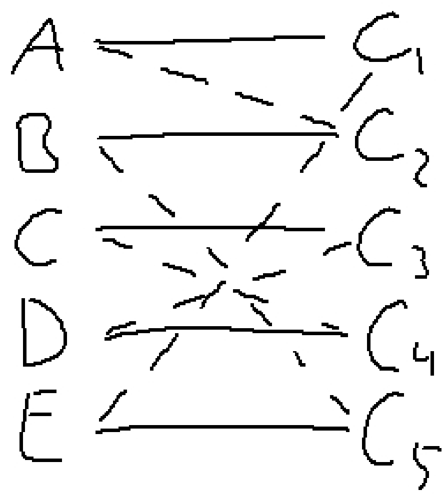
A B C D E
E A D C B

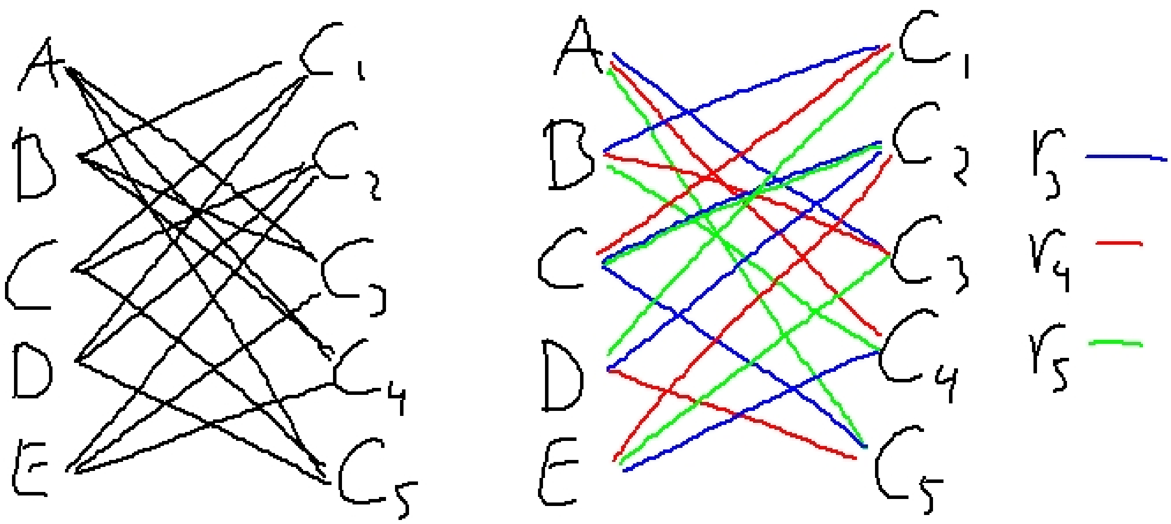
till en latinsk kvadrat (5×5)

Lösn:

r_1 ——

r_2 - - -





Vi drar kanter till de C_i som symbolen ej hade kanter till tidigare.

	A	B	C	D	E
	E	A	D	C	B
r_3	B	D	A	E	C
r_4	C	E	B	A	D
r_5	D	C	E	B	A

Vi fyller i symbolerna i den kolumn till viken det finns en kant med den rätta radfärgen. Så i rad 3 fyller vi i symbolerna efter kolumnen de har blå kant till. tex A har blå kant till c_3.

Sats: En godtycklig latinsk rektangel (med n symboler) av storlek $m \times n$ $(1 \leq m < n)$ kan fyllas i till en latinsk kvadrat.

Bevis: Låt $F = \{\{s_i, c_j\}$; sådana att symbolen s_i ~~ej~~ förekommer i kolumn $c_j\}$, dvs $G = (S \cup C, F)$ är det "bipartita komplementet".

S mängden av symboler C mängden av kolumner

Den ursprungliga grafen är reguljär med valens m så G är också reguljär med valens n-m. Den kan färgas med n-m färger. Färgningen ger fördelningen av symbolerna i övriga rader.

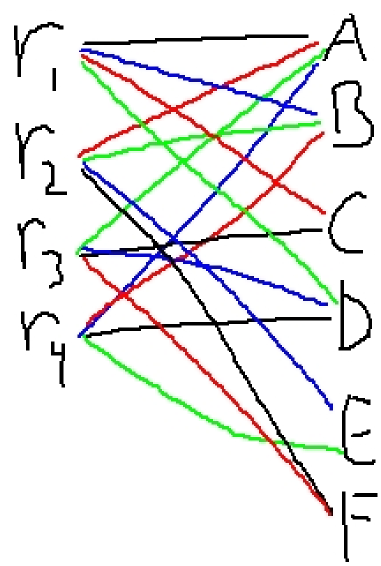
Ex: Visa att

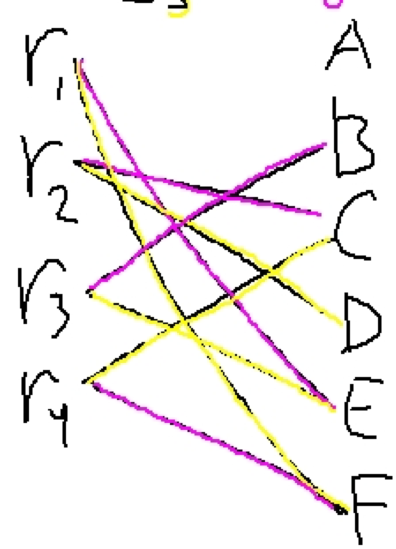
A	B	C	D	F	E
F	E	A	B	D	C
C	D	F	A	E	B
D	A	B	E	C	F
				c_5	c_6

kan utvidgas till en latinsk kvadrat.

Lösn:

c_1 —
c_2 —
c_3 —
c_4 —





Så färgningen gav oss
resterande kolumner och
vi har nu fått en latinsk
rektangel med 6 symboler
av typ 4×6 och vi kan
använda vår tidigare metod
för att fylla ut de två
sista raderna.

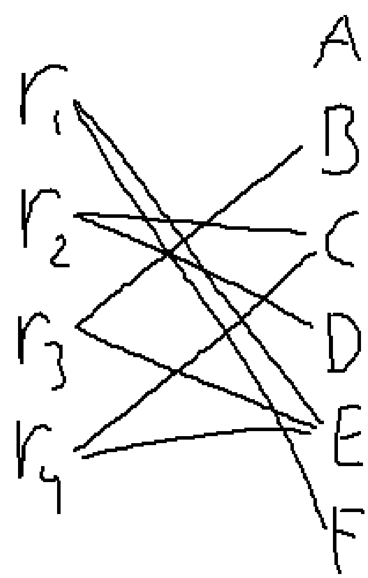
Övn: gör det!!

Ex:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ F & E & A & B \\ C & D & F & A \\ D & A & B & F \end{matrix}$$

kan <u>ej</u> utvidgas till en latinsk kvadrat 6×6.

"komplementet"

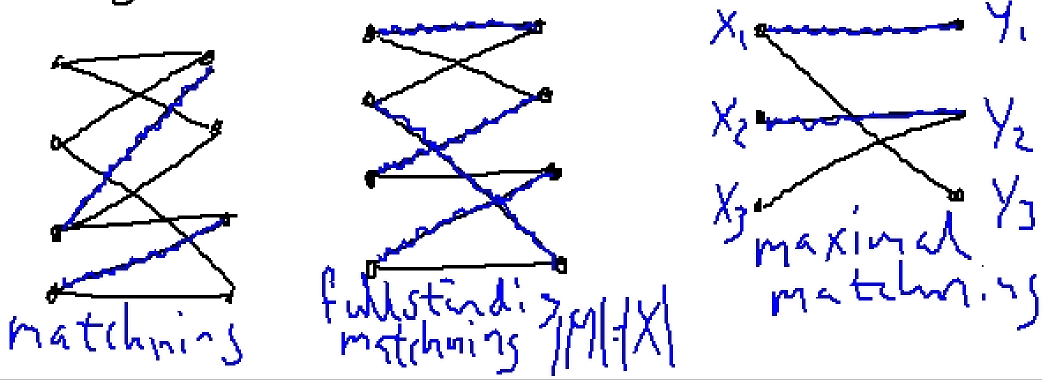


Vi ser att $\delta(E) = 3$ så två kolumner räcker ej.

Matchningar

Def: En *matchning* i en bipartit graf $G=(X\cup Y, E)$ är en delmängd $M \subseteq E$ som är sådan att inga kanter i M har något gemensamt hörn.

Ex:



I det sista exemplet kunde matchningen inte göras komplett. Problemet var att både x_2, x_3 går på y_2 och inte till något annat hörn.

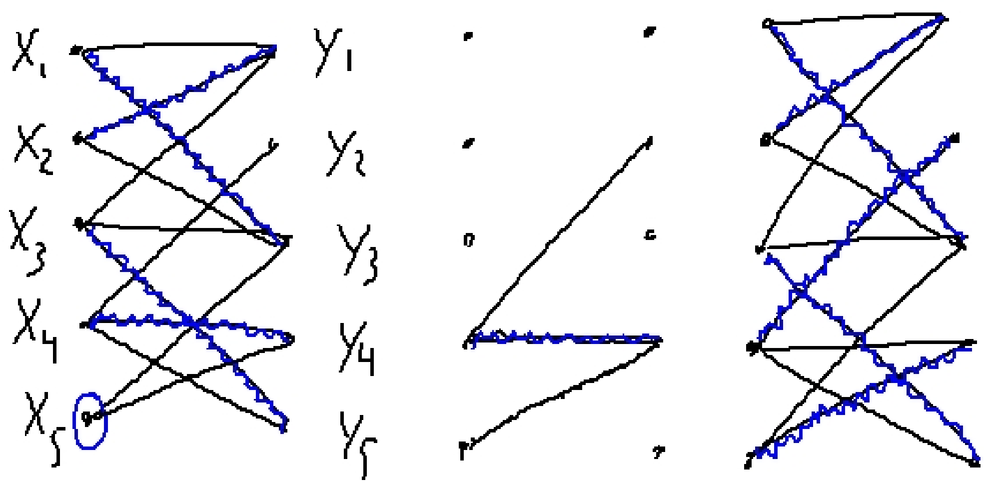
Låt $J(A) = \{ y \in Y ; \{x, y\} \in E$ för ngt $x \in A \}$, $A \subseteq X$. $J(\{x_2, x_3\}) = y_2$.

För att kunna få en fullständig matchning måste $|J(A)| \geq |A|$.

(Halls villkor)

Sats: En bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ har en fullständig matchning om och endast om $|J(A)| \geq |A|$ för alla $A \subseteq X$.

"bevis"



$\Gamma(\{x_5\}) = \{y_3, y_4\}$. Ta tex y_4
den är matchad med x_4.
och $\Gamma(\{x_4, x_5\}) = \{y_2, y_3, y_4, y_5\}$
Vi tar y_2 som ej är matchad.
Det ger en alternerande stig
vilken ger en bättre matchning
för i den alternerande stigen
har vi två hörn som är omatchade
vilket betyder att antalet omatchade
hörn är en mer än antalet matchade.