Om vi plockar fem kort ur en kortlek på hur många sätt kan vi då få fyrtal ?

Oordnat:

Valör på fyrtalet 13 sätt

Färger på fyrtalet $\binom{4}{4}$ sätt

Valör på det sista kortet 12 sätt

Färg på sista kortet $\binom{4}{1}$ sätt

SVAR: $13 \cdot 12 \cdot 4 = 624$ sätt

Alt:

Valör på fyrtalet 13 sätt

Sista kort $52-4=48$ sätt

SVAR: $13 \cdot 48$

Alt:

Kortet som ej ingår i fyrtalet 52 sätt

Valör på fyrtalet 12 sätt

SVAR: $52 \cdot 12$

Ordnat:

Platser åt fyrtalet $\binom{5}{4}$ sätt

Valör på fyrtalet 13 sätt

Färger $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt

Valör på sista kortet 12 sätt

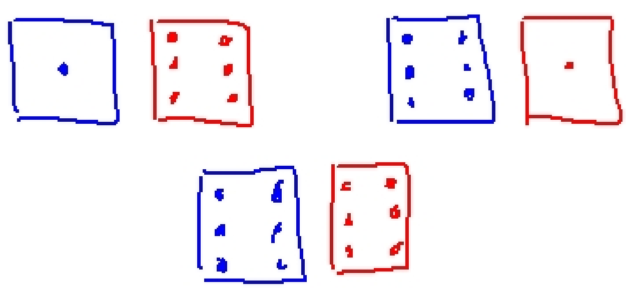
Färg på sista kortet 4 sätt

$$\binom{5}{4} \cdot 13 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 4 \Big/ 5! = 13 \cdot 12 \cdot 4$$

för att få oordnat

Hur stor är sannolikheten att vi får minst en 6:a när vi kastar fem likadana tärningar?

Sannolikheten att få tex en 1:a och en 6:a är större än sannolikheten att få två 6:or.



Därför måste vi räkna ordnat.

Totala antalet möjligheter blir därför 6^5.

Vi kan först räkna antalet sätt att inte få någon 6:a.

Det ger 5^5 möjligheter.

Sannolikheten att få minst en 6:a blir därför

$$\frac{6^5 - 5^5}{6^5}$$

Alternativt kan vi räkna hur många sätt vi får precis 1, 2, 3, 4, eller 5 6:or.

På hur många sätt kan vi få precis en 6:a?

$\binom{5}{1} 5^4$ sätt

2 6:or $\binom{5}{2} 5^3$

3 6:or $\binom{5}{3} 5^2$

4 6:or $\binom{5}{4} 5$

5 6:or 1

Sannolikheten att få minst en 6:a blir så

$$\frac{\binom{5}{1}5^4 + \binom{5}{2}5^3 + \binom{5}{3}5^2 + \binom{5}{4}5 + 1}{6^5}$$

$$6^5 - 5^5 = \binom{5}{1}5^4 + \binom{5}{2}5^3 + \binom{5}{3}5^2 + \binom{5}{4}5 + 1$$

ska gälla enligt föregående räkningar.

$$6^5 = (5+1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 5^{5-k} 1^k$$

$$= \binom{5}{0}5^5 + \binom{5}{1}5^4 + \binom{5}{2}5^3 + \binom{5}{3}5^2 + \binom{5}{4}5 + \binom{5}{5}5^0$$

Tenta 20 december 2001:

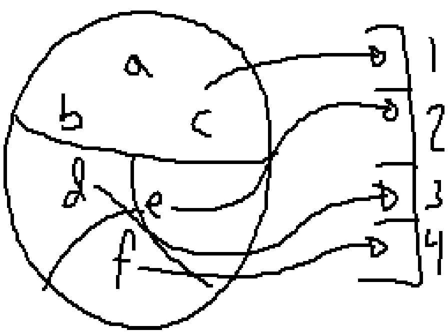
Uppgift 3: Sex bollar läggs slumpmässigt i fyra lådor.
Är sannolikheten att ingen låda blir tom större eller mindre än 0,4?

Lösn: Totala antalet möjligheter = antalet sätt att lägga 6 bollar i 4 lådor $= 4^6$.

Antalet fall där ingen låda blir tom = antalet surjektioner från mängden av bollar till mängden av lådor = $4!\,S(6,4)$

antal permutationer av lådorna

antalet sätt att dela upp en mängd med 6 element i 4 delar.



$$S(n,1) = 1 = S(n,n)$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$$

$S(1,k)$: 1

$S(2,k)$: 1 1

$S(3,k)$: 1 3 1

$S(4,k)$: 1 7 6 1

$S(5,k)$: 1 15 25 10 1

$S(6,k)$: 1 31 90 65 15 1

$S(6,4)$

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2)$$

$$S(6,2) = S(5,1) + 2S(5,2)$$

$$S(6,3) = S(5,2) + 3S(5,3)$$

Sannolikheten är

$$\frac{4!\,S(6,4)}{4^6} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 65}{2^{12}} = \frac{3\cdot 65}{2^9} = \frac{195}{512}$$

Återstår att jämföra med $0{,}4 = \frac{2}{5}$

$$2\cdot 512 = 1024$$
$$5\cdot 195 < 1000$$
$$\Rightarrow \quad 5\cdot 195 < 2\cdot 512 \Rightarrow \frac{195}{512} < 0{,}4$$

4. Bestäm polynom $\lambda(x)$ och $\mu(x)$ i $\mathbb{Z}_3[x]$ sådana att

$$\mu(x)\left(x^3+2x^2+1\right)+\lambda(x)\left(x^2+2x+2\right)=1$$

Lösn: Euklides algoritm

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x \\
\hline
x^2+2x+2 & x^3+2x^2+0x+1 \\
- & \left(x^3+2x^2+2x\right) \\
\hline
 & \qquad\qquad x+1
\end{array}$$

$$\overset{a}{x^3+2x^2+1}=\overset{q_1}{x}\,\overset{b}{\left(x^2+2x+2\right)}+\overset{r_1}{\left(x+1\right)}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 1 \\
\hline
x+1 & x^2 + 2x + 2 \\
- & (x^2 + x) \\
\hline
 & \qquad x + 2 \\
- & \qquad (x + 1) \\
\hline
 & \qquad\quad 1
\end{array}
$$

$$\overset{b}{x^2+2x+2} = \overset{q_2}{(x+1)}\overset{r_1}{(x+1)} + \overset{r_2}{\underline{\underline{1}}}$$

$$(x+1) = (x+1)\cdot 1 + 0$$

Vi går sedan baklänges

$$1 = (x^2+2x+2) - (x+1)(x+1)$$

$$1 = (x^2+2x+2) - (x+1)\big((x^3+2x^2+1) - x(x^2+2x+2)\big)$$

$$= (x^2+2x+2)\big(1 + x(x+1)\big) - (x+1)(x^3+2x^2+1)$$

$$1 = (x^2+2x+2)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\lambda(x)} + \underbrace{(2x+2)}_{\mu(x)}(x^3+2x^2+1)$$

SVAR: $\mu(x) = 2x+2 = -(x+1)$ och $\lambda(x) = x^2+x+1$