Visa att Fibonaccitalen uppfyller $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, $n \geq 1$.

Lösn: Påstående P_n: $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Bilda mängden F av $n \in \mathbb{N}$ för vilka påståendet är falskt.

$F \subseteq \mathbb{N}$ så om F är icke tom måste den ha ett minsta element m, enligt I13.

Så påståendet är falskt för u_m men sant för u_k där $k<m$. Vi vet att om $m>2$ ges $u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$.

(Ind bas) Vi har att $u_1 = u_2 = 1 < \frac{7}{4}$ och $< \left(\frac{7}{4}\right)^2$, så påståendet är sant för $n=1,2$, dvs $1,2 \notin F$. Alltså $m>2$.

Men $u_m = u_{m-1} + u_{m-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2}$

$$u_m < \left(\frac{7}{4}\right)^{m-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{m-1}\left(1 + \frac{4}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{m-1}\left(\frac{11}{7}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{m}$$

(ind steget)

Påståendet är därmed sant även för m, så $m \notin F$, vilket ger att F tom. $\Rightarrow$ Påståendet är sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Sats: Om $a \in \mathbb{Z}$ och $b \in \mathbb{N}$ då finns det heltal q, r sådana att

$$a = b \cdot q + r \quad , \quad 0 \leq r < b$$

Ex: $\underset{a}{9} = \underset{b}{4} \cdot 2 + 1$

Bevis: $R = \{ x \in \mathbb{N}_0 ,\ a = by + x$ för ngt heltal $y \}$

Då $a - b \cdot 0 = a$ och

$a - b \cdot a = (1-b) \cdot a$

så $R \neq \emptyset$ tomma mängden $\left(\begin{array}{ll} a \geq 0, & a \in R \\ a < 0 & (1-b) \cdot a \in R \end{array} \right)$

Då $R \subseteq N$ och R icke-tom

har R ~~ett~~ minsta element r.

Uppenbart att $r < b$ för om $r \geq b$

och $r = a - b \cdot y$ så är $r > \underbrace{a - b(y+1)}_{\geq 0}$

vilket motsäger att r minsta elementet.

Övn: Visa att resten är unik. (Om $a = bq + r$ och $a = b \cdot q' + r'$ $\Rightarrow q = q'$ och $r = r'$)

Baser:

$121 = 10 \cdot 12 + 1$

$12 = 10 \cdot 1 + 2$

$1 = 10 \cdot 0 + 1$

$(121)_{10} = (1111001)_2$

$121 = 2 \cdot 60 + 1$

$60 = 2 \cdot 30 + 0$

$30 = 2 \cdot 15 + 0$

$15 = 2 \cdot 7 + 1$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

$121 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 64$

$$121 = 2 \cdot 60 + 1 = 2 \cdot (2 \cdot 30 + 0) + 1 =$$

$$= 4 \cdot 30 + 2 \cdot 0 + 1 = 4 \cdot (2 \cdot 15 + 0) + 2 \cdot 0 + 1$$

$$= 8 \cdot 15 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 8 \cdot (2 \cdot 7 + 1) + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 16 \cdot 7 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 16 (2 \cdot 3 + 1) + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 32 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 32 (2 \cdot 1 + 1) + 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 =$$

$$= 64 \cdot 1 + 32 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1$$

$$121 = 8 \cdot 15 + 1$$
$$15 = 8 \cdot 1 + 7$$
$$1 = 8 \cdot 0 + 1$$

oktalt
(bas 8)

$$(121)_{10} = (171)_8$$

$$001 \vdots 111 \vdots 001$$

Hexadecimalt
(bas 16)

$$239 = 16 \cdot 14 + 15$$
$$14 = 16 \cdot 0 + 14$$
$$(239)_{10} = (EF)_{16}$$

$$239 = 2 \cdot 119 + 1$$
$$119 = 2 \cdot 59 + 1$$
$$59 = 2 \cdot 29 + 1$$
$$29 = 2 \cdot 14 + 1$$
$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$(239)_{10} = (1110 \vdots 1111)_2$$

Delbarhet

$y \mid x \iff x = y\underline{q}$ (dvs $r = 0$)

Ex. $5 \mid 30$, $30 = 5 \cdot 6$ $(30 \nmid 5)$

Ex: Om $a \mid b$ så gäller det också att $a \mid b \cdot c$, $c \in \mathbb{Z}$

Vi har att $b = a \cdot \underline{q}$ så

$bc = a \cdot \underline{q} \cdot c = a \cdot (\underline{q} \cdot c) \Rightarrow a \mid bc$.

Största gemensamma delare

$d \in \mathbb{Z}$ kallas största gemensamma delaren till a och $b \in \mathbb{Z}$, om

i) $d \mid a$ och $d \mid b$

ii) om $c \mid a$ och $c \mid b$ så $c \mid d$

iii) $d \geq 0$

$d = SGD(a, b)$

Låt $a = b \cdot q + r$. Enligt Övn 1.67 så om $c|a$ och $c|b$ så $c \mid a - b \cdot q$, dvs $c|r$.

Dessutom har vi att om $c|b$ och $c|r \Rightarrow c|a$.

Alltså $SGD(a,b) = SGD(b,r)$

Ex. $17 = 4 \cdot 4 + 1 \quad SGD(17,4) = SGD(4,1) = 1$

$25 = 5 \cdot 5$
$15 = 5 \cdot 3$

$25 = 15 \cdot 1 + 10 \quad SGD(25,15) = SGD(15,10)$

$15 = 10 \cdot 1 + 5 \quad SGD(15,10) = SGD(10,5) = 5$

$10 = 5 \cdot 2 + 0$

Euklides algoritm

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \qquad SGD(a,b) = SGD(b, r_1)$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2 \qquad SGD(b, r_1) = SGD(r_1, r_2)$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 \qquad SGD(r_1, r_2) = SGD(r_2, r_3)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$r_n = r_{n+1} q_{n+2} + 0 \qquad = SGD(r_n, r_{n+1}) = r_{n+1}$$

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_{n+1}$$

Sats 1.7: Låt $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ och $d = SGD(a,b)$ då finns $m, n \in \mathbb{Z}$ så att

$$d = a \cdot m + b \cdot n.$$

Bevis: Enligt Euklides algoritm fås d genom

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$
$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$
$$\vdots$$
$$r_n = r_{n+1}\, q_{n+2} + 0 \qquad d = r_{n+1}$$

Kör vi Euklides algoritm baklänges får vi

$$d = r_{n+1} = r_{n-1} - r_n \cdot q_{n+1}$$

$$= r_{n-1} - (r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n)\, q_{n+1}$$

$$= r_{n-1}(1 + q_n \cdot q_{n+1}) - r_{n-2} \cdot q_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$d = am + bn.$$

$25 = 15 \cdot 1 + 10$

$15 = 10 \cdot 1 + 5$

$5 = SGD(25, 15)$

$5 = 15 - 10 \cdot 1$

$5 = 15 - (25 - 15) =$

$= 2 \cdot 15 - 25$

Ex: Finn m,n sådana att

$$SGD(714,126) = m \cdot 714 + n \cdot 126$$

Euklides algoritm

$$714 = 126 \cdot 5 + 84$$
$$126 = 84 \cdot 1 + 42$$
$$84 = 2 \cdot 42 \qquad SGD(714,126) = 42$$

Baklänges

$$42 = 126 - 84$$
$$42 = 126 - (714 - 126 \cdot 5) = 6 \cdot 126 - 714$$

SVAR: $n = 6$, $m = -1$

Hitta en lösning till
ekvationen $17x + 16y = 4$

Vi har att $SGD(17, 16) = 1$
$(17 = 16 \cdot 1 + 1)$ så vi vet att
det finns tal m och n sådana
att $17m + 16n = 1$. $(m = 1, n = -1)$

Multiplicera med 4:

$$4 \cdot 17 \cdot m + 4 \cdot 16 \cdot n = 4$$

$$17\underbrace{(4m)}_{x} + 16\underbrace{(4n)}_{y} = 4$$

$x = 4$
$y = -4$