Föreläsning 30, sid 1

i $\mathbb{Z}_2[x]$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
x+1 & x^2 + 0x + 1 \\
- & (x^2 + x) \\
\hline
 & -x + 1 \\
- & (-x - 1) \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

$$x^2 + 1 = (x+1)(x-1) + \underline{\cancel{2}}$$

$$x^2 + 1 = (x+1)(x+1) = x^2 + \cancel{2}x + 1$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 2 \\ \hline 4x+1 & x^2 + 3x + 2 \\ - & (x^2 + 2x) \\ \hline & x + 2 \\ - & x + 2 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad : \mathbb{Z}_7[x]$$

$$4x \cdot \tfrac{1}{4}x = x^2$$

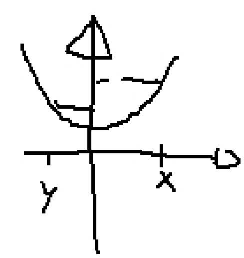
$$\tfrac{1}{4} \cdot 4 = 1 \qquad 4k + 7l = 1$$

har en lösning

$k = 2$, $l = -1$

Tenta 2001-12-20:

Uppgift 1 (3p): Låt $M = \{0, 1, \ldots, 99\}$ och definiera en funktion $f: M \to M$ genom att låta $f(x)$ vara resten vid division av $3x+5$ med 100. Avgör om f är injektiv, surjektiv eller bijektiv.



Lösn: För att f ska vara injektiv ska

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Om $f(x) = f(y)$ så är

$3x+5 \equiv 3y+5 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3x \equiv 3y \pmod{100}$

$SGD(3,100) = 1 \Rightarrow x \equiv y \pmod{100}$

$\Rightarrow x = y$ eftersom $x, y \in M$.

Funktionen är således injektiv.

Eftersom M är ändlig och

f är injektiv blir f även surjektiv

och därmed bijektiv.

$3x+5 \equiv y \pmod{100} \Leftrightarrow x \equiv 3^{-1}(y-5) \pmod{100}$

Vad blir $3^{-1} \bmod 100$?

$$3k + 100\ell = 1$$

Vi gissar $k = -33$ och $\ell = 1$

$= 67 = 100 - 33$

$$3 \cdot 67 \equiv 201 \equiv 1 \pmod{100}$$

SVAR: $3^{-1} = 67$.

Tenta 2001-08-22:

Uppgift 1(b): Ange kvot och rest vid division av 5BE med 1F där båda talen är angivna på hexadecimal form.

Lösn:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2F \\
\hline
1F & \underset{16^2}{5}\,\underset{16^1}{B}\,\underset{16^0}{E} \\
- & 3E \\
\hline
 & 1DE \\
- & 1D1 \\
\hline
 & D
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\overset{16^1}{1}\overset{16^0}{F} \\
2 \\
\hline
3E
\end{array}
$$

$1F \leftrightarrow (16+15) = (31)_{10}$

$2 \cdot 1F \leftrightarrow 2 \cdot 31$

$3E \leftrightarrow = 62$

$F \cdot 1F = 1F0 - 1F = 1D1$

SVAR:
kvot 2F
rest D

Tenta 2001-04-25:

Uppgift 4 (3p): Bestäm ordningen hos den multiplikativa gruppen av inverterbara element i $\mathbb{Z}_{24}$.

Lösn: De inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{24}$ är de som är relativt prima med 24. $1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$

$\cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23$

Svar: ordningen är 8.

Alternativt kan vi räkna med Eulerfunktionen:

$\phi(24)$ är antalet tal ≤ 24 som är relativt prima med 24.

$$\phi(24) = 24 - \phi(12) - \phi(8) - \phi(6) - \phi(4) - \phi(3) - \phi(2) - \phi(1) =$$

$$= 24 - \left(12 - \cancel{\phi(6)} - \cancel{\phi(4)} - \cancel{\phi(3)} - \cancel{\phi(2)} - \cancel{\phi(1)}\right) - \phi(8) - \cancel{\phi(6)} - \cancel{\phi(4)} - \cancel{\phi(3)} - \cancel{\phi(2)} - \cancel{\phi(1)}$$

$$= 24 - 12 - \left(8 - \phi(4) - \phi(2) - \phi(1)\right) = 24 - 12 - 8 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

Uppgift 6 (4p): Ett barn har sex klossar i olika färger. På hur många sätt kan barnet lägga klossarna i tre likadana lådor så att det kommer minst en kloss i varje låda?

Lösning: Antalet ges av $S(6,3)$.

1
1 1
1 3 1
1 7 6 1
1 15 25 10 1
1 31 90 65 15 1

SVAR: 90 sätt.

Tenta 2000-12-20:

Uppgift 4 (3p):

Den linjära kod som har paritetsmatris

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

rättar ett fel. Vilket ord har skickats om det uppstått ett fel och det mottagna ordet är 110011?

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_6 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = 0 \end{cases}$$

Vi sätter in ordet $\underset{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}{110011}$: VL

$$1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0$$
$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1$$
$$0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är andra kolumnen i H så den bit som är fel är bit 2. Det sända ordet var 100011.

Antag att vi istället mottog 100111

$$1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=1$$

$$1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1=1$$

$$0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1=1$$

Kolumnen $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ förekommer som kolumn 4 i H. Alltså ska vi ändra det 4:e biten så det sända ordet var 100011.

Tenta 2002-04-11:

Uppgift 2 (3p): Den booleska funktionen f ges av $f(x,y,z) = (x+y)z + xy$. Skriv f och $\bar{f}$ på disjunktiv normalform.

Lösn:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	x	y	z	f: $(x+y)z + xy$		$\bar{f}$: $(\bar{x}+\bar{y})\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$	
1	1	1	0	0	0	0		1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1	1	0	0	0	1	0		1	$\bar{x}\bar{y}z$
1	0	1	0	1	0	0		1	$\bar{x}y\bar{z}$
1	0	0	0	1	1	1	$\bar{x}yz$	0	
0	1	1	1	0	0	0		1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	0	1	0	1	1	$x\bar{y}z$	0	
0	0	1	1	1	0	1	$xy\bar{z}$	0	
0	0	0	1	1	1	1	xyz	0	

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

$$\bar{f}(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$x \backslash yz$	00	01	11	10
$\bar{x}$ 0			1	
x 1		1	1	1

$$(y+x)z + xy = yz + xz + xy$$

$$\bar{x}yz + xyz$$

$$= (\bar{x}+x)yz = yz$$