$3x + 2y = 1$

$x = 1\ ,\ y = -1$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$6x + 4y = 2$

$6 = 4 \cdot 1 + 2$ $\quad$ $SGD(4,6) = 2$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

$6 + 4 \cdot (-1) = 2$ $\quad$ $x = 1, y = -1$

Delar vi ekvationen med två
får vi $3x + 2y = 1$

$6x+4y=3$

$SGD(6,4)=2$ så VL
är delbart med 2 men HL
är aldrig delbart med 2
så ekvationen saknar lösningar.

En lösning till $3x+2y=1$
var $x=1, y=-1$ men vi har
också lösningen $x=-1, y=2$

Om $c \mid a \cdot b$ och $SGD(a,c) = d$ så delar $\frac{c}{d} \mid b$.

$c = d \cdot q$

$\frac{b\cancel{d}}{\cancel{d}q}$

Vi har att $d = a \cdot m + cn$ för något m och n. Då $c \mid ab$ så $c \mid a \cdot b \cdot m = b(d - c \cdot n) \Longrightarrow$ $c \mid b \cdot d$. Övn: visa att det ger påståendet.

Säg ~~att~~ (x,y) och (x',y')
bägge är lösningar till

$$3x+2y=1$$
$$3x'+2y'=1$$

$$\Rightarrow \quad 3x+2y = 3x'+2y'$$

$$3(x-x') = 2(y'-y)$$

$3 \mid 2(y'-y)$ men $SGD(3,2)=1 \Rightarrow 3 \mid (y'-y)$

på samma sätt $\quad 2 \mid (x-x')$. $\Rightarrow \quad y'-y = 3\cdot k,\ x-x' = 2\cdot l$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot 2\cdot l = 2\,3\,k \Rightarrow l = k.$$

$y' = y+3k$
$x' = x-2k$
$k \in \mathbb{Z}$

Ex: En teknolog har sexton mynt i fickan till ett sammanlagt värde av 75 kr. Hur många femkronor har hon om vi antar att hon inte har några femtioöringar?

Lösn: $10k + 5\cdot l + 1\cdot m = 75$

$k + l + m = 16 \Rightarrow k = 16 - l - m$

$75 = 10(16 - l - m) + 5l + m = 160 - 5l - 9m$

$85 = 5l + 9m$

$$9 = 5 \cdot 1 + 4$$
$$5 = 4 \cdot 1 + \underline{\underline{1}}$$
$$4 = 1 \cdot 4 + 0$$

$\mathrm{SGD}(9,5) = 1$

Vi löser ekvationen $1 = 5x + 9y$

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 + 9(-1)$$

$\Rightarrow$ $x = 2$, $y = -1$ en lösning

allmänna lösningen

$$x = 2 + 9n$$
$$y = -1 - 5n$$

$$5(2 + 9n) + 9(-1 - 5n) = 5 \cdot 2 + \cancel{45}n - 9 - \cancel{45}n$$

En lösning till $85 = 5\ell + 9m$ fås genom att multiplicera lösningen $(2,-1)$ med 85, dvs $(170,-85)$. Lösningarna blir

$$\ell = 170 + 9n$$
$$m = -85 - 5n$$

Vi måste ha $\ell, m \geq 0$

$\ell \geq 0 \Rightarrow 170 + 9n \geq 0 \Rightarrow 170 \geq -9n$

$$\frac{170}{9} \geq -n \Rightarrow 18 \geq -n$$

$$m \geq 0 \Rightarrow -85-5n \geq 0$$

$$\Rightarrow -n \geq \frac{85}{5} = 17$$

$$\Rightarrow -17 \geq n \geq -18$$

$$k = 16-m-\ell \geq 0 \Rightarrow n=-18$$

$$\ell = 170-9\cdot 18 = 8$$

$$m = -85+5\cdot 18 = 5$$

$$k = 16-\ell-m = 3$$

SVAR: Hon har 8st 5 kronor

Primfaktorisering.

Ett primtal är ett tal $p \geq 2$ sådant att de enda positiva delarna till p är 1 och p

Sats: Varje tal kan faktoriseras i primfaktorer.

bevisskiss: $n \geq 2$ är antingen ett primtal eller så kan n faktoriseras $n = k \cdot l$ men vi kan anta att k och l kan primfaktoriseras $\Rightarrow$ n kan primfaktoriseras.

Sats 1.8.1: $p \mid x_1 \cdots x_n \Rightarrow$ (p primtal) $\Rightarrow p \mid x_i$ för något i.

Bevis: Om $p \mid x_n$ är vi klara

så antas $p \nmid x_n \Rightarrow SGD(p, x_n) = 1$

$\Rightarrow$ finns m, l så att $1 = pm + x_n l$

$\Rightarrow x_1 \cdots x_n l = x_1 \cdots x_{n-1}(1 - pm)$

$\Rightarrow p \mid x_1 \cdots x_{n-1} (= x_1 \cdots x_n l + x_1 \cdots x_{n-1} pm)$

forts på samma sätt.

Ex: $4 \mid 6 \cdot 2$ men $4 \nmid 6$, $4 \nmid 2$.

Sats 1.8.2 (Aritmetikens fundamental-
sats)
Primfaktoriseringen är unik
upp till ordningen på faktorerna.

Ex: $15 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Bevis: Antas $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ där p_i:na och q_j:na primtal.

$\Rightarrow p_1 \mid q_1 \cdots q_s \Rightarrow p_1 \mid q_j$ för något $j \Rightarrow p_1 = q_j$.

Omvänt gäller

$q_j \mid p_1 \cdots p_r \Rightarrow q_j \mid p_i$ för något $i \Rightarrow q_j = p_i$

Ex: $15 = \underset{p_1\ p_2}{3 \cdot 5} = \underset{q_1\ q_2}{5 \cdot 3}$ $\quad p_1 = q_2$, $p_2 = q_1$

Ex: $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Bevis: Om $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ där $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $2n^2 = m^2$. Vi primfaktoriserar m och n: $m = p_1 \cdots p_r 2^a$

$n = q_1 \cdots q_s 2^b$

Sätter vi dessa

får vi

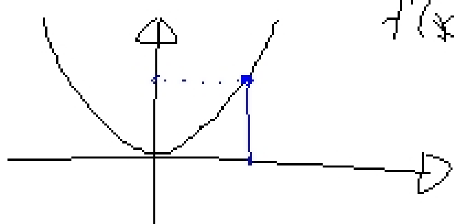
$$2 \cdot 2^{2b} q_1^2 \cdots q_s^2 = p_1^2 \cdots p_r^2 2^{2a}$$

$p_i \neq 2$, $q_j \neq 2$

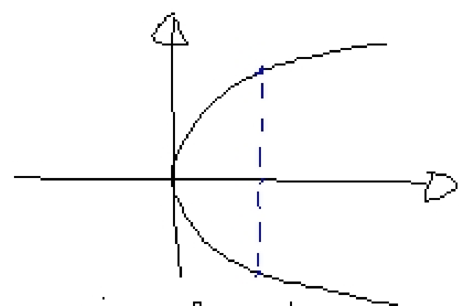
Antalet 2:or måste vara lika många men 2b+1 udda och 2a jämnt så det kan aldrig stämma $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ irrationellt.

Funktioner

$f(x) = x^2$



funktion



ej funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Fibonacci talen: $u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, $n \geq 3$

$f(n) = u_n \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Kasta tärning: $f : \mathbb{N} \to \{1,2,3,4,5,6\}$

$f(n)$ ger värdet vid n:te kastet.

Tentaresultat $f : \{\text{studenter}\} \to$
$\to \{0, \ldots, 39\}$

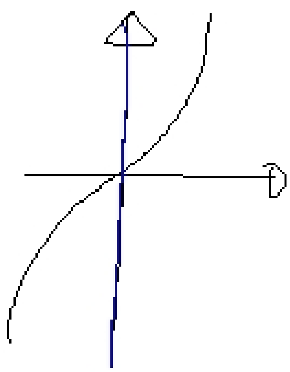
Sammansättning:

$g : \{0, \ldots, 39\} \to \{U, 3, 4, 5\}$

$g(n) = U$ om $n \leq 15$, $g(n) = 3$ $16 \leq n \leq 21$

$g(n) = 4$ om $22 \leq n \leq 29$, $g(n) = 5$ $30 \leq n \leq 39$

$g \circ f : \{\text{studenter}\} \to \{U, 3, 4, 5\}$

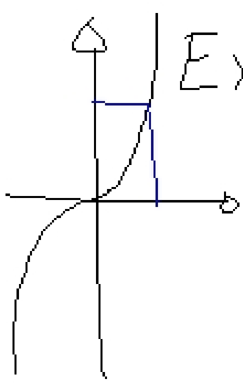


Ex: $f(x)=x^3$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ surjektiv

$f(n)=|n|$ $\quad f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0$ surjektiv

$f(x)=x^2$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ej surjektiv

$f: X\to Y$ är surjektiv om $V_f = Y$



Ex: $f(x)=x^3$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injektiv

$f(n)=n+1$ $\quad f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injektiv

$V_f=\{2,3,\dots\}$

$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$