$f(x) = x^3$ bijektiv

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (surjektiv och injektiv)

$X \subseteq Y$ $\iota(x) = x$ injektiv

Om $X = Y$ $\iota: X \to Y$ bijektiv.

Sats: Om $f: X \to Y$ och $g: Y \to Z$ är injektiva så är även $g \circ f$ injektiv. (Motsv för surjektiva)

Vi vill visa att $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$\Rightarrow \; x_1 = x_2.$

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

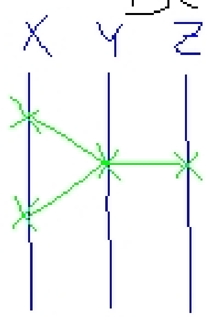
$$g \text{ inj} \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

$$f \text{ inj} \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Sats: Om $g \circ f : X \to Z$ inj

så är $f : X \to Y$ inj

Bevis: $f(x_1) = f(x_2)$



$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Leftrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$g \circ f$ inj $\Rightarrow x_1 = x_2$.

så f injektiv.

$g \circ f$ surjektiv

$\Rightarrow g$ surjektiv

Övn: Visa motsvarande för surjektiva.

Def: $f: X \to Y$ har en invers
$g: Y \to X$ om $g \circ f(x) = x$
och $f \circ g(y) = y$, $x \in X$ och $y \in Y$.
(så $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$)

$$f(x) = y \iff g(y) = x$$

Inversen är unik för (g, g' inverser)

$$g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ \tilde{g}) = (g \circ f) \circ \tilde{g} = id_X \circ \tilde{g} = \tilde{g}$$

Sats: $f: X \Rightarrow Y$ har invers

$\Longleftrightarrow$ f bijektion

(dvs f surjektiv och injektiv.)

Bevis ($\Rightarrow$:) $f \circ f^{-1} = id_Y$ $\left\{ \begin{array}{l} id_Y \text{ surjektiv} \\ \Rightarrow f \text{ surj} \end{array} \right.$

$f^{-1} \circ f = id_X$ $\left\{ \begin{array}{l} id_X \text{ inj} \\ \Rightarrow f \text{ inj} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ f bijektiv.

($\Longleftarrow$) f injektiv $\overset{f: X \to Y}{\Longrightarrow}$ vi kan definiera en funktion $g: V_f \to X$ genom $g(y) = x$ om $f(x) = y$.

f surjektiv $\Leftrightarrow$ $V_f = Y$.

Så $g: Y \to X$ invers.

Att räkna

Mängden $\{\overset{1}{U}, \overset{2}{3}, \overset{3}{4}, \overset{4}{5}\}$ har fyra element. Vi har bildat funktionen f:

$f(1) = U$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ $f(4) = 5$.

$$f : \{1,2,3,4\} \to \{U,3,4,5\}$$

f ska vara injektiv så vi kan inte ha $f(1) = f(2) = U$ till exempel.

f surjektiv

Vi kan inte ha

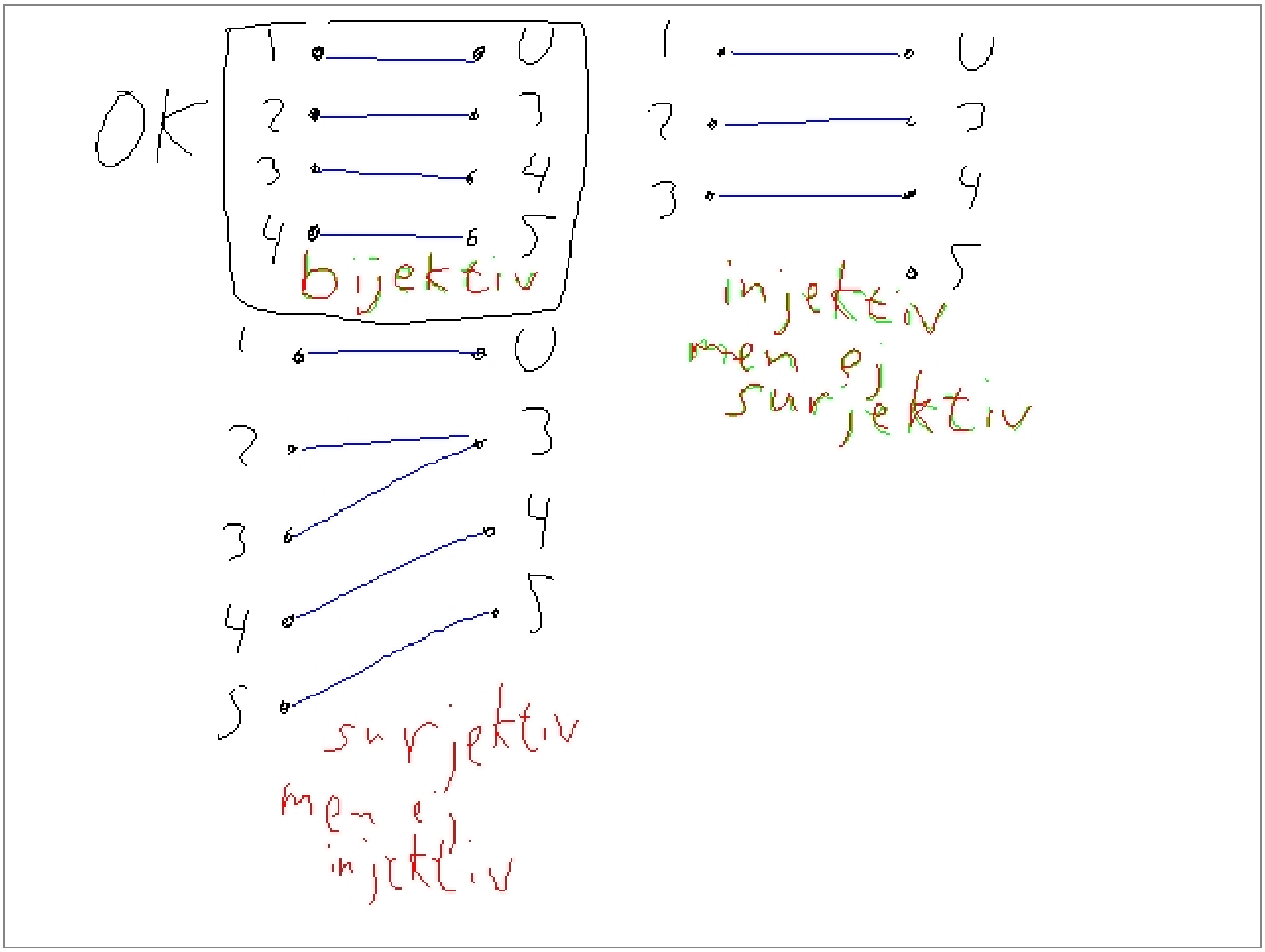
$$g : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{\overset{1}{0}, \overset{2}{3}, \overset{3}{4}, 5\}$$

$$g(1) = 0,\quad g(2) = 3,\quad g(3) = 4$$

Sammantaget vill vi alltså ha en bijektion.

($g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{\overset{1}{0}, \overset{2,3}{3}, \overset{4}{4}, \overset{5}{5}\}$

g surjektiv men ej injektiv)

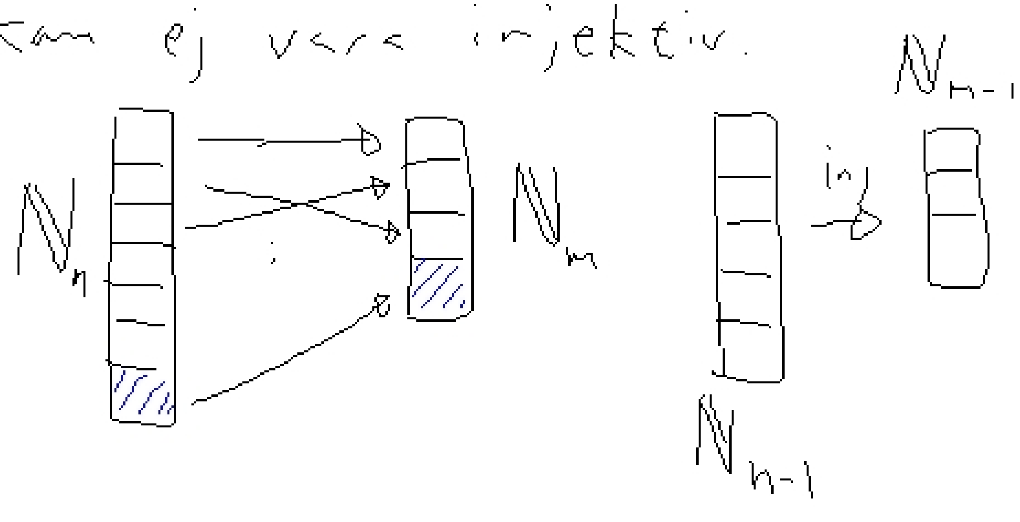

OK
1 2 3 4
0 3 4 5
bijektiv
1 2 3
0 3 4 5
injektiv
men ej
surjektiv
1 2 3 4 5
0 3 4 5
surjektiv
men ej
injektiv

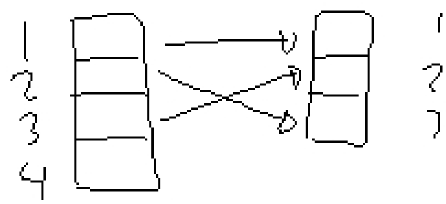
Sats: Det finns ingen injektion från $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ om $n > m$.

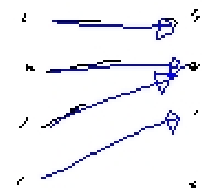
$\left(\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\} \right)$

Ex: $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ kan ej vara injektiv.

"Bevis":







(varken surjektiv eller inj)

Motsvarande gäller surjektivitet. $\mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ ej surjektiv om $m<n$

(följdsats)

Kor: Om $f:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ som är injektiv då är den en bijektion.

Def: Om vi har en bijektion från $\mathbb{N}_n \to X$ säger vi att X har kardinalitet n och skriver $|X| = n$. tex $|\{0,3,4,5\}| = 4$.

Brevlådeprincipen

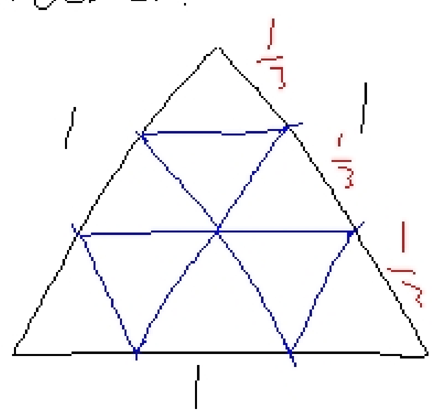
Om $n+1$ st brev ska läggas i n lådor måste en låda innehålla mer än ett brev.

Ex: Om 13 personer befinner sig i ett rum så finns minst ett par som är födda samma månad.

Ex: Om vi bland talen $1, 2, \ldots, 200$ väljer ut 101st så finns det ett par bland dessa sådant att det ena talet delar det andra.

Lösn: Varje tal kan skrivas
som $2^k \cdot a$ för ngt k
och ngt udda tal a.
$a \in \{1, 3, 5, \ldots, 199\}$ (bara udda)
$|\{1, 3, 5, \ldots, 199\}| = 100$
så två av de 101 talen
har samma a faktor, tex
$2^k \cdot a$ och $2^l \cdot a$. Antingen
$k \leq l$ och $2^k a \mid 2^l a$ eller
$l \leq k$ och $2^l a \mid 2^k a$.

Övn 2.6.8: Visa att det bland 10 punkter i en liksidig triangel med sida 1 måste finnas minst ett par på avstånd högst $\frac{1}{3}$ från varandra.



9 lådor och 10 punkter $\Rightarrow$ 2 punkter hamnar i samma låda.

Oändliga mängder

En mängd kallas ändlig om $|X| = n$ för något $n \in \mathbb{N}_0$ ($|\emptyset| = 0$) annars sägs mängden vara oändlig.

Ex: $\mathbb{N}$ är oändlig.

Ex: $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ oändlig

innehåller