$$
\begin{aligned}
2002 &= 2 \cdot 1001 + 0 \\
1001 &= 2 \cdot 500 + 1 \\
500 &= 2 \cdot 250 + 0 \\
250 &= 2 \cdot 125 + 0 \\
125 &= 2 \cdot 62 + 1 \\
62 &= 2 \cdot 31 + 0 \\
31 &= 2 \cdot 15 + 1 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}
$$

$$(2002)_{10} = (11111010010)_2$$

$$
\begin{aligned}
1523 &= 2 \cdot 761 + 1 \\
761 &= 2 \quad 380 + 1 \\
380 &= 2 \cdot 190 + 0 \\
190 &= 2 \quad 95 + 0 \\
95 &= 2 \cdot 47 + 1 \\
47 &= 2 \cdot 23 + 1 \\
23 &= 2 \cdot 11 + 1 \\
11 &= 2 \quad 5 + 1 \\
5 &= 2 \quad 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}
$$

$$(1523)_{10} = (10111110011)_2$$

$$(1851)_{10} = (11100111011)_2$$

$$1851 = 2 \; 925 + 1$$
$$925 = 2 \cdot 462 + 1$$
$$462 = 2 \cdot 231 + 0$$
$$231 = 2 \cdot 115 + 1$$
$$115 = 2 \cdot 57 + 1$$
$$57 = 2 \; 28 + 1$$
$$28 = 2 \; 14 + 0$$
$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$2002 = 16 \cdot 125 + 2$$

$$125 = 16 \cdot 7 + 13$$

$$7 = 16 \cdot 0 + 7$$

$$(2002)_{10} = (7D2)_{16}$$

$$(2002)_{10} = (\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{1101}_{D}\,\underbrace{0010}_{2})_2$$

$$(1523)_{10} = (\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{1111}_{F}\,\underbrace{0011}_{3})_2$$

$$(1851)_{10} = (\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{1011}_{B})_2$$

Inlämningsuppgiften:

$$95x + 215y = 8205$$

Bestäm alla positiva lösningar, dvs $x > 0$, $y > 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

$215 = 43 \cdot 5$, $95 = 19 \cdot 5$

SGD(43, 19) = 1

$43 = 2 \cdot 19 + 5$ $\qquad 1 = 4(43 - 2 \cdot 19) - 19$

$19 = 5 \cdot 3 + 4$ $\qquad 1 = 4 \cdot 5 - 19$

$5 = 4 \cdot 1 + 1$ $\qquad 1 = 5 - (19 - 5 \cdot 3)$

$\qquad 1 = 5 - 4$

$$1 = 4 \cdot 43 - 9 \cdot 19$$

$$95x + 215y = 8205$$

$$\Updownarrow$$

$$19x + 43y = 1641$$

$$19m + 43n = 1$$

en lösning $(m,n) = (-9, 4)$

ger lösningen $(x,y) = (-9 \cdot 1641, 4 \cdot 1641)$

Allmänna lösningen

$$x = -9 \cdot 1641 + 43k$$

$$y = 4 \cdot 1641 - 19k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$19x + 43y = 1641$$

$$19x' + 43y' = 1641$$

$$19(x - x') = 43(y' - y)$$

$$\Rightarrow 19 \mid (y' - y)$$

$$43 \mid (x - x')$$

Villkor: lösningarna ska vara positiva.

$$\left.\begin{aligned} -9\cdot 1641 + 43k &> 0 \\ 4\cdot 1641 - 19k &> 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\cdot 1641}{19} > k > \frac{9\cdot 1641}{43}$$

$$\Rightarrow \quad 345 \geq k > 343$$

$\Rightarrow \quad k = 344$ eller 345.

$$x_1 = -9 \cdot 1641 + 43 \cdot 344 = 23$$

$$y_1 = 4 \cdot 1641 - 19 \cdot 344 = 28$$

$$(x_1, y_1) = (23, 28)$$

$$x_2 = -9 \cdot 1641 + 43 \cdot 345 = 66$$

$$y_2 = 4 \cdot 1641 - 19 \cdot 345 = 9$$

$$(x_2, y_2) = (66, 9).$$

Övn 1.9.18: Visa att om $SGD(x,y)=1$, $x,y \in \mathbb{N}$ och $xy = z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, så måste $x = n^2$ och $y = m^2$ för några naturliga tal n, m.

Lösn: $2 \cdot 2 = 4$. Vi primfaktoriserar

$SGD(x,y) \neq 2$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$\frac{2}{x}\ \frac{2}{x}\ \frac{3}{y}\ \frac{3}{y}$

$x = 2 \cdot 3$

$y = 2 \cdot 3$

$SGD(x,y) = 6$

x, y och z:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$
$$y = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$$
$$z = r_1^{\gamma_1} \cdots r_t^{\gamma_t}$$

$$\underbrace{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}}_{x} \cdot \underbrace{q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}}_{y} = \underbrace{r_1^{2\gamma_1} \cdots r_t^{2\gamma_t}}_{z^2}$$

Eftersom $SGD(x,y) = 1$ måste $p_i \neq q_j$ för alla i, j. Men aritmetikens fundamental sats säger att primtalen i VL = primfaktorerna i HL. I HL har vi ett jämnt antal av varje primfaktor så samma gäller för VL. Talen x, y måste därför ha ett jämnt antal av varje primfaktor, så de är kvadrater.

Övn 2.4.3 Visa att det bland 12 givna heltal finns ett par vars skillnad är delbar med 11.

Lösn: Vi vill använda lådprincipen. Låt oss beteckna heltalen $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$. Bilda $r_k = a_1 - a_k$. Vi tittar på resterna när vi delar r_k:na med 11. Det finns 11 möjliga rester men 12 tal så 2 måste ha samma rest, säg att de är r_k och r_ℓ.

Vi har att $r_k = 11m + r$ och $r_\ell = 11n + r$ så $11 \mid r_k - r_\ell$.

$$r_k - r_\ell = (a_1 - a_k) - (a_1 - a_\ell) = a_\ell - a_k.$$

Så talen a_k, a_ℓ har differens delbar med 11.

Föreläsning 6, sid 13