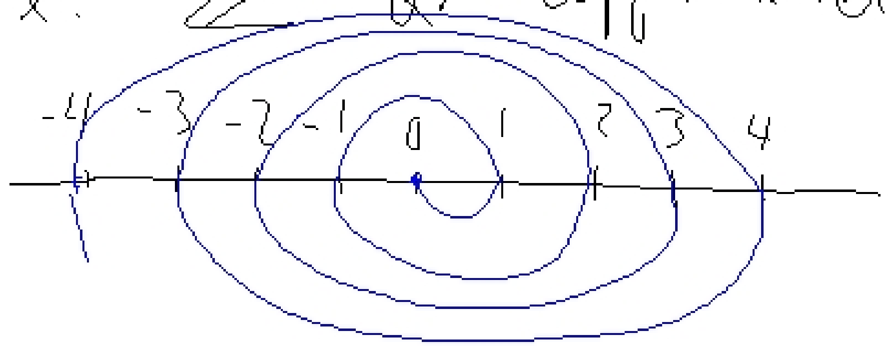
$|X| = |Y| \iff$ finns en bijektion $X \to Y$

Om $|X| = |\mathbb{N}|$ säger vi att X är uppräknelig.

Ex: $\mathbb{Z}$ är uppräknelig



Övn: Visa att mängden av rationella tal är uppräknelig (Ledning: identifierar rationella tal med punkter i planet)

Ex. $|\mathbb{R}| = |[0,1)| > |\mathbb{N}|$

$$\begin{array}{ll} 1 & 0{,}1\,2\,7\,4\,1\ldots \\ 2 & 0{,}3\,5\,6\,0\,0\ldots \\ 3 & 0{,}9\,9\,8\,8\,7\ldots \\ 4 & 0{,}1\,1\,2\,4\,3\ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Talet 0,2431 ... Kie decimalen skiljer s.g

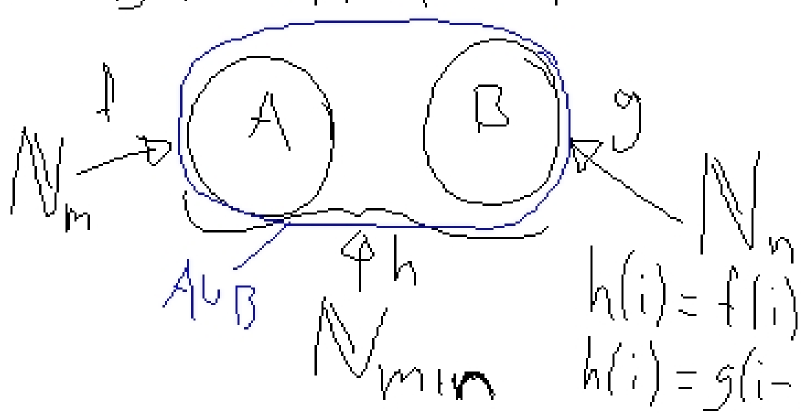
Vecka ?

Additionsprincipen

Sats: Om A och B disjunkta ($A \cap B = \emptyset$) så gäller det att

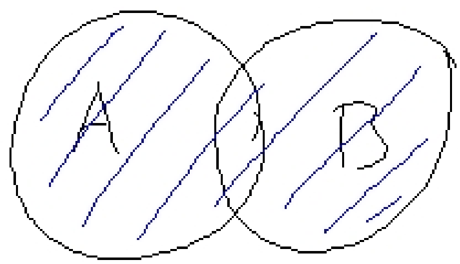
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Bevis:



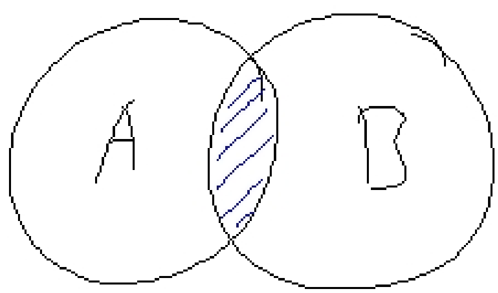
$h(i) = f(i) \quad 1 \leq i \leq m$

$h(i) = g(i-m) \quad i > m$



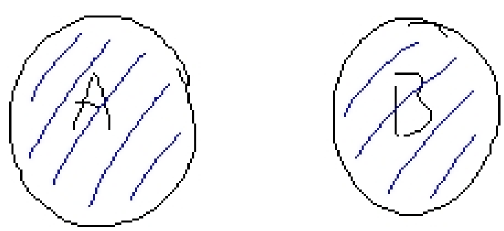
$A \cup B \ni x$

$x \in A$ eller $x \in B$



$A \cap B \ni x$

$x \in A$ och $x \in B$



$A \cup B$

CA det som inte ligger i A

Generaliserade lådprincipen.

Om $m > nr$ brev ska delas ut i n lådor så måste någon låda få minst $r+1$ st brev.

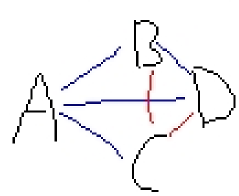
Lådorna är ju disjunkta så om alla lådorna bara fick r st brev får vi $n \cdot r$ st brev. Men vi hade ju minst $nr+1$ st.

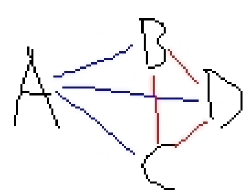
Ex. Om 15 personer tillsammans äter 136 kriftor måste någon äta minst 10 st

Lösn: $136 = 15 \cdot 9 + 1$

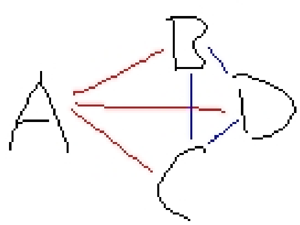
Ex: Visa att det bland sex personer finns minst tre ömsesidiga vänner eller minst tre ömsesidiga främlingar.

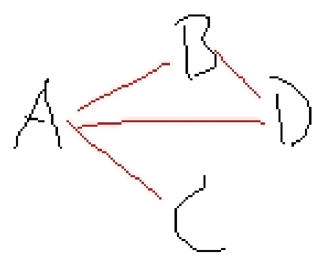
Utgå från någon av personerna säg A och dela in de övriga i vänner till A och främlingar. Vi har 2 "lådor" och 5 "brev" så någon innehåller minst 3 personer Om det är mängden av vänner till A Om det finns ett par vänner har vi tre ömsesidiga vänner annars har vi tre ömsesidiga främlingar.





Om det är mängden av främlingar till A som är minst tre st, så är dessa antingen ömsesidiga vänner eller så finns ett par främlingar och då har vi 3 ömsesidiga främlingar





Produktmängder

$X \times Y \qquad (x, y) \qquad x \in X,\ y \in Y$

Ex: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\{A, B, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \supseteq S$

	1	2	3	4	5		
A		X	X		X	3 +	r_A
B	X			X	X	3 +	r_B
C		X		X		2 =	r_C
	1 +	2 +	1 +	2 +	2	= 8	
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5		

Sats: Om $S \subseteq X \times Y$ gäller att

i) $|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$

ii) Om $r_x = r$ och $c_y = c$ gäller

$$r|X| = c|Y|$$

iii) (multiplikationsprincipen)

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

Ex: Ett sällskap på 10 personer äter middag på en restaurang i Kina. Varje person äter från 7 av rätterna och varje rätt prövas av 5 personer. Hur många rätter hade man?

Lösning: $10 \cdot 7 = 5 \cdot x$

där x är antalet rittier.

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{10 \cdot 7}{5} = 14.$

Eulersfunktion

Def. $n \geq 1$ så låter vi $\phi(n)$ beteckna antalet heltal, x, $1 \leq x \leq n$ sådana att n och x är relativt prima, dvs $SGD(n, x) = 1$.

Ex: Om p, p primtal så är

$$\phi(p) = p-1$$

$\phi(5) = 4$ $\quad$ $1 \; 2 \; 3 \; 4 \; \cancel{5}$

Ex: $\phi(15) = 8$ $\quad$ $1 \; 2 \; \cancel{3} \; 4 \; \cancel{5} \; \cancel{6} \; 7$

$8 \; \cancel{9} \; \cancel{10} \; 11 \; \cancel{12} \; 13 \; 14 \; \cancel{15}$

$\phi(3) = 2$

$\phi(5) = 4$ $\quad$ $15 = 3 \cdot 5$

$\phi(1) = 1$

$$\phi(1) + \phi(3) + \phi(5) + \phi(15) = 15$$

Sats: $\displaystyle\sum_{d|n} \phi(d) = n$

Ex: $\phi(p) = p-1 \qquad \phi(1)+\phi(p) = p$

Bevis:
$(n=15)$

	d\f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi(1)$	1	15														
$\phi(3)$	3	5	10													
$\phi(5)$	5	3	6	9	12											
$\phi(15)$	15	1	2		4			7	8			11		13	14	

$1 \le f \le d$, $SGD(f,d)=1$

siffran väljs till $\dfrac{f \cdot n}{d}$

Vi vill ha en bijektion från delmängden till $\mathbb{N}_n$

$$\beta(d,f) = \frac{f \cdot n}{d}.$$

β inj: $\quad \frac{f \cdot n}{d} = \frac{f' n}{d'} \Rightarrow d' f = f' d$

$SGD(d', f') = 1 \Rightarrow d' \mid d$ och

på samma sätt $d \mid d' \Rightarrow d = d'$

$\Rightarrow f = f'$.

β surj: Givet $1 \leq k \leq n$

$$d = \frac{n}{SGD(n,k)}, \quad f = \frac{k}{SGD(n,k)}.$$

Övn 1.77 ger: $SGD(d, f) = 1$

$\Longrightarrow |\text{delmängden}| = n$.

Ex: $\phi(24) = 24 - \phi(1) - \phi(2) -$

$- \phi(3) - \phi(4) - \phi(6) - \phi(8) - \phi(12)$

$= 24 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 - 4 - 4 = 8$