Ordnat val med repetition

Ex. Att bilda ord med tre bokstäver handlar om att först välja första bokstaven i ordet, sedan den andra och sist den tredje. Alltså en funktion $N_3 \to$ alfabetet.

AAA
APA

Ett ordnat val med repetition kan ses som en funktion $f: N_n \to X$

Sats: Låt X och Y vara två ändliga mängder, $|X| = m$, $|Y| = n$, och låt F beteckna mängden av alla funktioner från $X \to Y$. $|F| = n^m$.

Ex: Svenska ~~alfabetet~~ har 29 bokstäver. Alltså kan vi bilda 29^3 st möjliga ord med 3 bokstäver

Bevis. En funktion från $X \to Y$ kan ses som ett element i mängden $\underbrace{Y \times Y \times \dots \times Y}_{m \text{ st}}$ genom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ så tar vi $(f(x_1), \dots, f(x_m))$.

Multiplikationsprincipen ger

$$|Y^m| = |\underbrace{Y \times \dots \times Y}_{m \text{ st}}| = |Y|^m = n^m$$

Ex: Antalet delmängder till en mängd, X, med m element är 2^m.

Lösn: Givet en delmängd kan vi skapa en funktion $f: X \to \{0,1\}$ genom att låta

$x \in X$, $f(x) = 0$ om x ej finns i delmängden
$= 1$ om x ligger i delmängden

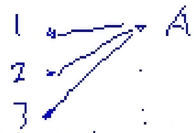
Ordnat val utan repetition

Ex: I en förening med 18 medlemmar ska utses en styrelse, bestående av ordförande, sekreterare och kassör. På hur många sätt kan styrelsen komma att se ut, om alla föreningsmedlemmar har samma chans att bli valda och ingen får ha mer än en post?

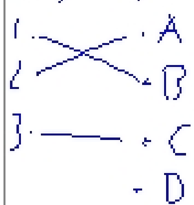
Lösn: $18 \cdot 17 \cdot 16$ sätt.

Sats: Antalet ordnade val utan repetition av m element ur en mängd Y med n element är detsamma som antalet injektioner $i : N_m \to Y$ och det antalet är

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$



ej inj



inj

Bevis: $i(1)$ kan väljas på n sätt, sedan finns det bara $n-1$ sätt att välja $i(2)$ osv

Ex: Hur många fensiffriga tal finns det där alla siffrorna är olika?

Lösn: Första siffran kan väljas på 9 sätt eftersom den ej får vara 0. För nästa har vi igen 9 möjligheter för då får 0:an komma med

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ olika siffror

Permutationer

Ordnat val, utan repetition, av n element ur en mängd med n element.

En permutation av en ändlig mängd X är en bijektion $X \to X$.

Ex:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{array}$$

radnotation

$\alpha : \mathbb{N}_5 \to \mathbb{N}_5$: $\alpha(1) = 2,\ \alpha(2) = 3,\ \alpha(3) = 5$

$\alpha(4) = 1,\ \alpha(5) = 4.$

Mängden av permutationer av $\mathbb{N}_n$ betecknas S_n. En permutation är en bijektion så speciellt en injektion från $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ så $|S_n| = n!$ $\left(n \cdot (n-1) \cdots (n-n+1) = n!\right)$

$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, $n \geq 1$.

Eftersom en permutation är en bij funktion från $N_n \to N_n$ kan vi sätta samman två permutationer och få en ny.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\alpha: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\
\beta & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\beta: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 2 & 5 & 1 & 4 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\beta\circ\alpha: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4
\end{array}
$$

Istället för $\beta\circ\alpha$ skriver vi $\beta\alpha$.

Sats. Mängden S_n har följande egenskaper

I1 i) Om $\pi, \sigma \in S_n$ så $\pi\sigma \in S_n$

I3 ii) Om $\pi, \sigma, \tau \in S_n$ så gäller

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\ \mathrm{id}$$

$$(\pi\sigma)\tau = \pi(\sigma\tau)$$

I4 iii) id är en permutation $\pi \in S_n$ och $\mathrm{id}\,\pi = \pi\,\mathrm{id} = \pi$

I6 iv) För varje $\pi \in S_n$ så finns π^{-1} i S_n så att $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \mathrm{id}$.

addition

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
\downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \alpha & \alpha^{-1} \\
2 & 3 & 5 & 1 & 4 & &
\end{array}$$

Vad blir α^{-1} ?

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \alpha^{-1} \\
4 & 1 & 2 & 5 & 3 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \alpha \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 &
\end{array}$$

$\alpha\alpha^{-1} = id$

Övn: Testa $\alpha^{-1}\alpha = id$

Viktigt att notera att I? ($a+b=b+a$) inte gäller!

Ex.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \pi & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 1 & 3 \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ 3 & 2 & 1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \pi \\ 3 & 1 & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \sigma\pi & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \pi\sigma \\ 3 & 1 & 2 & \end{array}$$

Cykel notation:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad (12)(3)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad (123)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad (132)$$

Föreläsning 8, sid 15

$$\pi: \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 4$$

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$$

$$\pi^{-1}: \quad 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 4$$

$$(1\ 3\ 2)(4\ 5)$$

$$(3\ 2\ 1)(5\ 4)$$

$$\pi = (123)(45)$$

$$\pi^2 = (123)(45)(123)(45)$$
$$= (132)(4)(5)$$

$$\pi^3 = (132)(4)(5)(123)(45)$$
$$= (1)(2)(3)(45)$$

$$\pi^4 = (1)(2)(3)(45)(123)(45)$$
$$= (123)(4)(5)$$

$$\pi^5 = (123)(4)(5)(123)(45) = (132)(45)$$

$$\pi^6 = (132)(45)(123)(45) = (1)(2)(3)(4)(5) = id$$

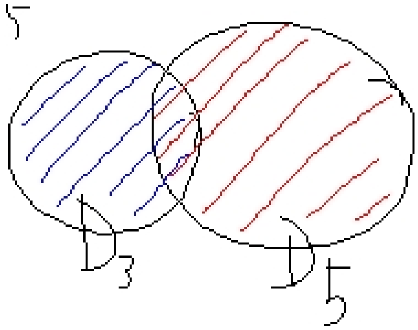
Sållprincipen

$\phi(15) = 8 \qquad 15 = 3 \cdot 5$

$15 - \frac{15}{3} - \frac{15}{5} + \frac{15}{3 \cdot 5} = 15 - 5 - 3 + 1 = 8$

$|N_{15}| - |D_3 \cup D_5|$

N_{15}



$|D_3 \cup D_5| = |D_3| + |D_5| - |D_3 \cap D_5|$

Föreläsning 8, sid 18