Oordnat val utan repetition

Att välja r element, utan hänsyn till ordning, ur en mängd, X, med n element är detsamma som att välja en delmängd Y med r element i X. Antalet r-delmängder till en n-mängd betecknas $\binom{n}{r}$.

Ex. Antalet 2-delmängder till $\{1,2,3\}$ är 3 st $= \binom{3}{2}$. $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$.

Sats: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Bevis: Givet en n-mängd X och ~~ett~~ elemen x kan vi dela upp r-delmängderna i två högar, dels sådana som innehåller x och dels sådana som inte innehåller x. Då x ligger i mängden behöver vi plocka ut r-1 element ur $X \setminus \{x\}$, det kan göras på $\binom{n-1}{r-1}$ sätt. Om x inte finns med måste de r elementen väljas bland de övriga. Det ger $\binom{n-1}{r}$.

Ex: $\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

$x=1$: Delmängder som innehåller

$\binom{2}{1}$ 1. $\{1,2\}$ och $\{1,3\}$

Vi väljer det övriga elementet ur mängden $\{2,3\}$.

Delmängder som ej innehåller 1:

$\binom{2}{2}$ Vi ska välja 2 element ur $\{2,3\}$.

$\{2,3\}$.

$$\begin{array}{lccccccc}
0 & & & & 1 & & & \\
1 & & & 1 & & 1 & & \\
2 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
3 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{3}
\end{array}$$

Pascals triangel

Sats: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$

Bevis: Att välja en r-delmängd kan delas upp i momenten.
Först väljer vi r element ordnat

det kan göras på

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

sedan delar vi bort ordningen, dvs vi delar med $r!$. Totalt får vi

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{r!}$$

Ex: Hur många ord med 7 bokstäver kan vi bilda med hjälp av bokstäverna i ordet DISKRET?

Lösn. Antalet ord blir detsamma som antalet permutationer dvs $7!$ st

DISKRET, TERKSID osv.

Ex: Hur många ord med 3 bokstäver kan vi bilda från DISKRET?

Lösn: Ordnat val utan repetition

$7 \cdot 6 \cdot 5$ sätt

1:a 2:a 3:e

Ex: Hur många ord på 6 bokstäver kan vi bilda ur ordet ANALYS?

Lösning: Vi betraktar för alla som olika: ANALYS Antalet ord blir då samma som antalet permutationer, dvs 6! st.
Vi måste sedan ta hänsyn till att ANALYS = ANALYS.
För att ta bort denna dubbelräkning måste vi dela med 2!
Alltså: $\frac{6!}{2!}$ ord.

Ex: Ord med 4 bokstäver från ordet ANNA.

Lösn: Betrakta först alla som olika $A_1 N_1 N_2 A_2$ ger $4!$

Sedan tar vi hänsyn till att

$$A_1 N_1 N_2 A_2 = A_2 N_1 N_2 A_1$$

genom att dela med $2!$

Därefter tar vi hänsyn till att

$$A N_1 N_2 A = A N_2 N_1 A$$

igen genom att dela med $2!$.

$$\frac{4!}{2!\,2!}$$

Ex: Hur många ord på 3 bokstäver kan vi bilda ur ordet ANALYS?

Lösn: 0 A:n : $4 \cdot 3 \cdot 2$ NLYS

1 A : $4 \cdot 3 \cdot \underline{3}$

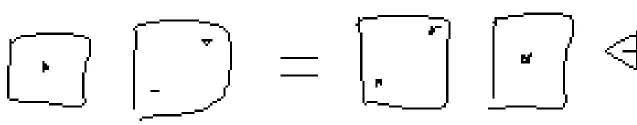
A□□, □A□, □□A

2 A : $4 \cdot 3 = 4 \cdot \binom{3}{1} = 4 \binom{3}{2}$

AA□, A□A, □AA

Oordnat val med repetition

Ex: Om vi kastar två tärningar är antalet möjliga utfall 21 st



Tar vi hänsyn till ordningen har vi 36 möjligheter men räknas lika. För varje siffra den första tärningen visar finns 5 möjligheter att få olika siffror, dvs 30 möjligheter. Dessa ska vi dela med 2 för att ta bort ordningen. Sedan har vi sex fall kvar ($\square\square$)

Totalt: $\frac{30}{2} + 6 = 15 + 6 = 21.$

Vi kan beskriva det här som en bokhylla med böcker $1, \ldots, 6$ och två bokstöd.

$\square\square \quad 1 \; 2 \,|\, 3 \quad 4 \,|\, 5 \; 6$

$\square\square \quad 1 \; 2 \,||\, 3 \quad 4 \quad 5 \; 6$

Vi ska välja platser åt de

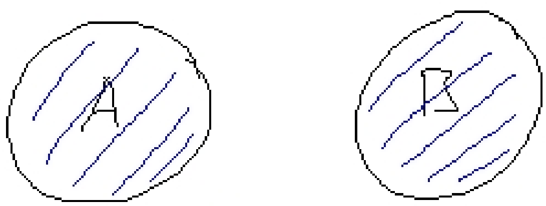
två bokstäder från
de 7 platserna:

$\binom{7}{2}$ sätt $= \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

Mer allmänt: Om vi ska
välja r element ur en mängd
med n element oordnat med
repetion, har vi

$\binom{n+r-1}{r}$ möjligheter.

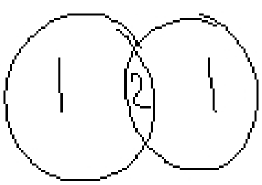
Sållprincipen

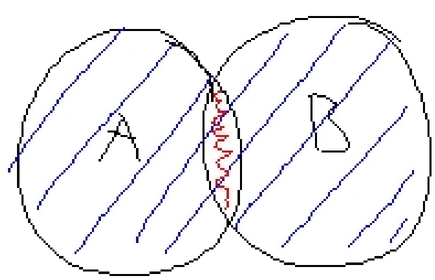


$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

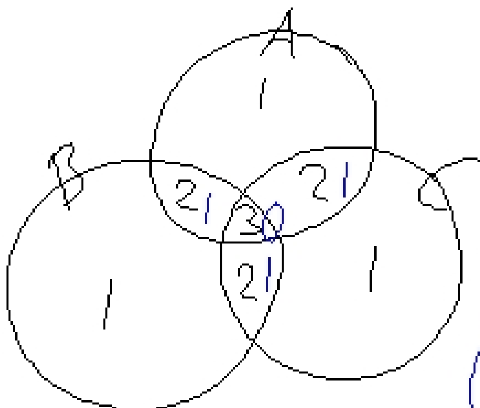




$A \cup B$

$A \cap B \neq \emptyset$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$|A\cup B\cup C|$

$= |A|+|B|+|C|$ α_1

$-|A\cap B|-|A\cap C|$ $-\alpha_2$

$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$ α_3

Sats: Om $A_1,\dots,A_n$ är ändliga mängder gäller

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| = \alpha_1-\alpha_2+\dots+(-1)^{n-1}\alpha_n$$

där α_i är summan av kardinaliteterna för snitt av i st mängder.

Kap 4.5

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Phi(60) = 60 - |A(2) \cup A(3) \cup A(5)|$$

$$= 60 - \Big(|A(2)| + |A(3)| + |A(5)| -$$

$$- |A(2,3)| - |A(2,5)| - |A(3,5)| +$$

$$+ |A(2,3,5)| \Big) = 60 - \frac{60}{2} - \frac{60}{3} - \frac{60}{5} +$$

$$+ \frac{60}{6} + \frac{60}{10} + \frac{60}{15} - \frac{60}{30} =$$

$$= 60 - 30 - 20 - 12 + 10 + 6 + 4 - 2 =$$

$$= 16$$

Ex Hur många tal mindre än 16 saknar gemensam delare med 20?

Lösn: $20 = 2^2 \cdot 5$

$$15 - |A(2) \cup A(5)| =$$

$$= 15 - |A(2)| - |A(5)| + |A(2,5)| = 15 - \left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor - \frac{15}{5} + \left\lfloor \frac{15}{10} \right\rfloor$$

$$= 15 - 7 - 3 + 1$$

$$= 6.$$