1. Låt $A(t)$ stå för mängden salt i behållaren vid tidpunkt t. Förändringen i mängden salt ges av

$$\frac{dA}{dt} = \text{inkommande} - \text{utgående} = 1 - 5\frac{A(t)}{100+5t}.$$

Ekvationen kan lösas genom att multiplicera ekvationen med integrerande faktorn: $e^{\int 1/(20+t)\,dt} = C(20+t)$. Det ger

$$A(t) = \frac{1}{C(20+t)} \int C(20+t)\,dt = \frac{20+t}{2} + \frac{D}{20+t}.$$

Då $A(0) = 100$ får vi $D = 1800$, så

$$A(t) = \frac{20+t}{2} + \frac{1800}{20+t}.$$

Den sökta tiden, t_1, ges så av

$$60 = \frac{20+t_1}{2} + \frac{1800}{20+t_1},$$

vilket ger $t_1 = 40$.
SVAR: Det sker efter 40 minuter.

2. Laplacetransformering ger(vi använder L.21, L.12 och L.24)

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s+2} + \mathfrak{L}\{f\}(s)\frac{1}{s^2+1}$$

vilket efter omskrivning blir

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+2)}.$$

Vi partialbråksuppdelar höger ledet

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$$

vilket är lätt att se att det har lösningarna $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ och $C = \frac{5}{4}$. Vi får därmed

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{s+2}.$$

Vi återtransformerar med hjälp av L.20 och L.21 och får

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}e^{-2t}.$$

(Alternativt kan man skriva om uttrycket som

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+2)}$$

och sen använda L.21 och L.33)
SVAR: $f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}e^{-2t}$.

3. Den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{X} = \Phi \int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$$

där Φ är en fundamental matris för den homogena ekvationen $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. För att lösa den homogena ekvationen behöver vi bestämma egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. Egenvärdena fås som rötter till ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

dvs $\lambda = 2$ eller $\lambda = -1$. Egenvektorerna ges av

$$\underline{\lambda = 2:} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$\underline{\lambda = -1:} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

så

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Det ger

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

och därmed också

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}e^{t} & \frac{2}{3}e^{t} \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen ges nu av

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} = \Phi \int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt &= \Phi \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{2t} \end{pmatrix} dt \\
&= \Phi \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + C \\ -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} + D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+e^t \\ -1+e^t \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \\
&= C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + D\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-1+e^t).
\end{aligned}$$

4. Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$. Ekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ger

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = C$$

eftersom vänsterledet bara beror av x och mellan ledet bara beror av t. Det ger ekvationerna

$$\begin{cases} X''(x) - CX(x) = 0 \\ T''(t) - CT(t) = 0. \end{cases}$$

<u>$0 < C = \lambda^2$:</u>

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}, T(t) = d_1 e^{\lambda t} + d_2 e^{-\lambda t}.$$

Randvillkoren $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ger då att

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

vilket ger den triviala lösningen $u \equiv 0$.
<u>$C = 0$:</u>

$$X(x) = c_1 x + c_2, T(t) = d_1 t + d_2$$

Randvillkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger då $c_1 = c_2 = 0$ så åter bara den triviala lösningen.
<u>$0 > C = -\lambda^2$:</u>

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x, T(t) = d_1 \cos \lambda t + d_2 \sin \lambda t.$$

Randvillkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger $c_1 = 0$ och $\sin \lambda L = 0$, dvs $\lambda = \frac{n\pi}{L}$. Vi har alltså att för $n = 1, 2, \ldots$ så är

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi}{L} x (A_n \cos \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} t)$$

en lösning till ekvationen $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$ som uppfyller randvillkoren $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$. Superpositionsprincipen säger att detsamma gäller

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x (A_n \cos \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} t).$$

Vi ska nu bestämma koefficienterna A_n och B_n så att även begynnelsevillkoren

$$u(x,0) = 2\sin x - \sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 4 \sin 2x$$

är uppfyllda. Vi har att

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

så $A_1 = 2$, $A_3 = -1$ och övriga $A_n = 0$. Vidare är

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

så $B_2 = 4$ och övriga $B_n = 0$.
SVAR: $u(x,t) = 2 \cos \frac{\pi}{L} t \sin \frac{\pi}{L} x - \cos \frac{3\pi}{L} t \sin \frac{3\pi}{L} x + \sin \frac{2\pi}{L} t \sin \frac{2\pi}{L} x$.

5. Det som blir kvar ges av ekvationerna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \\ x^2 + z^2 \ge 1 \end{cases} .$$

Den sökta volymen ges därför av

$$\begin{aligned}
\iint_{4 \ge x^2+z^2 \ge 1} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} dy \right) dxdz &= \iint_{4 \ge x^2+z^2 \ge 1} 2\sqrt{4-x^2-z^2}\, dxdz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 2\sqrt{4-r^2} r\, dr \right) d\theta \\
&= 2\pi \left[\frac{4}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_1^2 = 8\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

SVAR: Volymen är $8\pi\sqrt{3}$.

6. Man ser lätt att $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ vilket visar att fältet är konservativt och att vi därmed kan byta väg och gå längs den räta linjen $\Gamma_1 = t(4, 8, 8)$ istället. Så

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (64t^2, 32t^2, 32t^2) \cdot (4, 8, 8)\, dt \\
&= \int_0^1 256 \cdot 3t^2\, dt = [256t^3]_0^1 = 256.
\end{aligned}$$

SVAR: 256.