Herons formel

Foerst anvaender vi oss av cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad \text{Haerav}$$

cosinus foer vinkeln C aer

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Genom att tillaempa konjugatregeln $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$ pao trigettan faor vi

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C) = (1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}).$$

Inuti varje parentes tar vi nu gemensam naemnare:

$$1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab};$$

och

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab}$$

Enligt areasatsen aer triangelns area $A = 0.5ab\sin C$ och daermed

$$A^2 = (1/4)a^2b^2\sin^2 C = (1/4)a^2b^2\frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}\cdot\frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} = (1/16)\frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}\cdot\frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab}$$

Konjugatregel på det sista uttrycket ger

$$A^2 = (1/16)(c - (a - b))(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)$$

vilket aer precis $p(p - a)(p - b)(p - c)$.