Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Tentamen i 5B1204, DISKRET MATEMATIK för D
Torsdagen den 11 april 2002

Skrivtid: 8.00 – 13.00
Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Inga hjälpmedel tillåtna, inte ens räknedosa.

Betygsgränser (preliminära): 25 poäng ger betyg 3, 33 poäng ger betyg 4 och 42 poäng ger betyg 5.
Slutbetyget på kursen bestäms av betyget på skrivningen och betyget på uppsatsen.

Teoridel

Den som vt 2002 blivit godkänd på lappskrivning nr i får automatiskt 4 poäng på uppgift nr i (i=1,2,3,4,5), och skall inte göra denna uppgift.
Ange på skrivningsomslaget vilka lappskrivningar du klarat.

1a) (1p) Ange **en** lösning till ekvationen (den allmänna lösningen krävs **inte**):

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 5a_n + n, \quad n = 0, 1, \dots$$

b) (1p) Vad menas med att två grafer är **isomorfa**?
c) (1p) Hur många kanter har en 5-reguljär graf med 14 hörn (eng. vertices)?
d) (1p) Vilket är det minsta antalet färger man kan **hörnfärga** (eng. vertex-colour) den **fullständiga bipartita grafen** (eng. complete bipartite graph) $K_{7,8}$ med?

2a) (1p) Formulera **Halls villkor** för existens av en fullständig matchning i en bipartit graf.
b) (2p) Vad säger **välordningsaxiomet** (eng. well-ordering axiom) för heltalen $\mathbb{Z}$? Förklara hur det medför **induktionsprincipen** för de naturliga talen $\mathbb{N}$.
c) (1p) Vad menas med att funktionen $f : X \to Y$ är en **surjektion**?

3a) (1p) Låt X vara en k-mängd och Y en n-mängd (dvs $|X| = k$ och $|Y| = n$). Hur många **injektioner** $f : X \to Y$ finns det?
b) (1p) Hur många olika positiva delare till talet 78000 finns det?
c) (2p) Vad säger **sållprincipen** (eng. the sieve principle) i fallet med tre mängder A_1, A_2, A_3? Ge ett exempel på användning av detta.

4a) (1p) Ange som ett heltal koefficienten för $x^3y^2z^2$ i $(x + y + z)^7$.
b) (2p) Hur många element i S_8 är **konjugerade** (eng. conjugate) med permutationen $\pi = (1\ 3\ 4\ 6)(5\ 8\ 7)$?
c) (1p) Hur definieras **möbiusfunktionen** $\mu(n)$?

5a) (1p) Låt x_0 vara en lösning till de båda ekvationerna $x \equiv a_1 \pmod{17}$ och $x \equiv a_2 \pmod{23}$. Finn **alla** x som löser båda ekvationerna.
b) (1p) Om A, B är grupper, vad menas med den **direkta produkten** $A \times B$?
c) (2p) Formulera och bevisa kortfattat **Lagranges sats** för ändliga grupper.

Vänd!

PROBLEMDEL

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

6a) (3p) Finn det minsta talet $e \geq 100$ sådant att $(1189, e)$ kan användas som krypteringsnyckel i ett RSA-system. Finn också ett tal d, så att $(1189, d)$ är en motsvarande dekrypteringsnyckel. $[1189 = 29 \cdot 41]$
b) (3p) Låt $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$ för $k = 1, 2, \dots$
Visa, t.ex. med induktion, att

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

$S(n,k)$ betecknar som vanligt stirlingtalet av andra slaget.

7a) (2p) På hur många sätt kan fyra flickor och fem pojkar sitta på tre röda och sex vita stolar, en på varje stol, så att minst en flicka sitter på en röd stol?
b) (2p) Nu skall varje barn ange sin älsklingsstol. På hur många sätt kan det ske, om exakt sex av stolarna inte är någons älsklingsstol?
c) (2p) Alla barnen har tagit av sig sin mössa. På hur många sätt kan de få tillbaks dem så att exakt en av flickorna (och kanske några pojkar) får sin egen mössa?
[Svaren får innehålla fakulteter och de fyra elementära räknesätten. Alla barn, mössor och stolar betraktas som särskiljbara.]

8a) (2p) Låt p vara ett primtal och a ett positivt heltal, $a \equiv 0 \pmod{p-1}$.
Visa att $1^a + 2^a + \dots + (p-1)^a \equiv -1 \pmod{p}$.
b) (2p) Finn det minsta positiva heltal n så att $299n - 52$ är delbart med 533.
c) (2p) Vilka är de sista två siffrorna (i bas 10) i talet 1369^{422}?

9a) (2p) Låt G vara en graf med de sex sidoytorna i en kub som hörn (!) och kanter mellan de hörn (i grafen) som motsvarar angränsande sidor i kuben. Rita G. Har G någon sluten eulerväg? Har G någon hamiltoncykel?
b) (2p) Låt $\bar{G} = (V, \bar{E})$ vara **komplementgrafen** till grafen $G = (V, E)$, dvs $\bar{G}$ har samma hörnmängd som G och kanter precis mellan de hörn som **inte** är grannar i G. Visa att om G och $\bar{G}$ är isomorfa, är $|V| \equiv 0$ eller $1 \pmod{4}$.
c) (2p) Visa att om man till ett **träd** (eng. tree) $T = (V, E)$ lägger en kant mellan två hörn som inte är grannar i T, får man en graf med **exakt en** cykel.

10a) (3p) Finn alla monadiska (dvs högstagradskoefficienten = 1) irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$ som är delare till både $p(x) = x^6 + 4x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ och $q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 3$.
b) (3p) Låt $f_{a,b} : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ vara definierad av $f_{a,b}(x) = ax + b$. Visa att $\{f_{a,b} | a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0\}$, med operationen sammansättning av funktioner, är en grupp. Visa också att denna grupp är isomorf med S_3, gruppen av permutationer av tre element.

Lycka till!

Lösningar läggs ut på kurssidan efter skrivningens slut.
Där meddelas också när tentan är rättad.