Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Tentamen i 5B1204, DISKRET MATEMATIK för D
Torsdagen den 7 mars 2002

Skrivtid: 8.00 – 13.00
Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Inga hjälpmedel tillåtna, inte ens räknedosa.

Betygsgränser (preliminära): 25 poäng ger betyg 3, 33 poäng ger betyg 4 och 42 poäng ger betyg 5.
Slutbetyget på kursen bestäms av betyget på skrivningen och betyget på uppsatsen.

Teoridel

Den som vt 2002 blivit godkänd på lappskrivning nr i får automatiskt 4 poäng på uppgift nr i (i=1,2,3,4,5), och skall inte göra denna uppgift.
Ange på skrivningsomslaget vilka lappskrivningar du klarat.

1a) (1p) Ange allmänna lösningen till ekvationen:

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

b) (1p) Vad menas med att en graf $G = (V, E)$ är **reguljär**?
c) (1p) Ett **träd** $T = (V, E)$ har 11 kanter. Hur många hörn har T?
d) (1p) Vilket är det minsta antalet färger man kan **kantfärga** den **fullständiga bipartita grafen** (eng. complete bipartite graph) $K_{4,5}$ med?

2a) (2p) Låt $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ vara en ändlig familj av ändliga mängder. Förklara vad som menas med en **transversal** för $\mathcal{S}$ och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att $\mathcal{S}$ skall ha en transversal.
b) (1p) Vad menas med att d är en **största gemensam delare** (eng. greatest common divisor) till heltalen a och b?
c) (1p) Vad menas med att funktionen $f : X \to Y$ är en **bijektion**?

3a) (2p) Vad innebär **additionsprincipen** i kombinatoriken? Ge ett exempel där man kan använda denna princip.
b) (1p) Formulera **binomialsatsen** i fallet att exponenten är ett positivt heltal (dvs det fall som behandlats i kursen).
c) (1p) Låt r och n vara positiva heltal. På hur många sätt kan icke-negativa heltal $k_1, k_2, \ldots, k_n$ väljas så att $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$?

4a) (1p) Definiera vad som menas med en **ekvivalensrelation**.
b) (2p) Hur många **surjektioner** finns det från mängden X till mängden Y, om $|X| = n$ och $|Y| = k$? Förklara ingående symboler.
c) (1p) Vad menas med att två permutationer $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade** (eng. conjugate)?

5a) (2p) Förklara varför **grupptabellen** (eng. group table) för en grupp alltid är en **latinsk kvadrat**.
b) (2p) Vad menas med ett **primitivt irreducibelt polynom** i $\mathbb{Z}_p[x]$?

Vänd!

Problemdel

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

6a) (2p) En linjär, binär kod ges av kontrollmatrisen (eng. check matrix) $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Orden $(011101), (101001), (100110)$ har mottagits. Vilka kodord har sänts, om högst ett fel har uppstått i varje ord?
b) (2p) Hur många fel i ett ord kan rättas med denna kod?
c) (2p) Ett system för RSA-kryptering ges av $E(x) = x^9 \pmod n$ och $D(y) = y^{49} \pmod n$. Finn det största möjliga värdet för talet n.

7a) (2p) En skolklass med 11 flickor och 9 pojkar skall ställa upp sig i ett led. Det får inte stå två flickor längst fram. På hur många sätt kan de ställa sig?
b) (2p) På hur många sätt kan det ske om Lasse och Bosse (pojkar i klassen) dessutom inte får stå intill varandra?
[Svaren till a) och b) får innehålla fakulteter och de fyra räknesätten.]
c) (2p) Elementen g och h i en grupp säges **kommutera** om $gh = hg$. Hur många element i S_{10} kommuterar med $\alpha = (1\ 4)(2\ 8\ 3\ 9)(5\ 10\ 7)$?

8a) (2p) Bestäm alla heltal x och y som uppfyller $39x + 45y = 12$.
b) (2p) Finn alla heltal x som uppfyller

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{14} \\ 4x \equiv 5 \pmod{13}. \end{cases}$$

c) (2p) Finn det minsta positiva heltal n sådant att $758^n \equiv 1 \pmod{1155}$.

9a) (2p) Avgör (med motivering) i fallen i), ii) och iii) om det finns någon graf med åtta hörn med dessa valenser:
(Liksom i kursboken betraktar vi bara grafer utan loopar och multipla kanter.)
i) $0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 6$ ii) $1, 1, 2, 3, 3, 4, 7, 7$ iii) $3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6$.
b) (2p) För vilka $n \geq 3$ gäller att den **fullständiga grafen** (eng. complete graph) K_n innehåller dels en hamiltoncykel och dels en sluten väg som saknar gemensamma kanter med hamiltoncykeln och går exakt en gång genom var och en av grafens övriga kanter?
c) (2p) Låt $\bar{G} = (V, \bar{E})$ vara **komplementgrafen** till grafen $G = (V, E)$, dvs grafen med samma hörnmängd som G och kanter precis mellan de hörn som **inte** är grannar i G. Visa att minst en av G och $\bar{G}$ är sammanhängande (eng. connected).

10a) (2p) Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}_5[x]$.
b) (2p) Låt p vara ett primtal, $p \equiv 3 \pmod 4$. Visa att det för alla heltal x gäller $p \nmid x^2 + 1$, dvs att $x^2 + 1$ inte är delbart med p.
c) (2p) Låt p vara ett primtal, $p \equiv 1 \pmod 4$. Visa att det finns ett heltal x, sådant att $p \mid x^2 + 1$.
[Ledning för b) och c): Betrakta sambandet som en ekvation för x i $\mathbb{Z}_p$.]

Lycka till!

Lösningar läggs ut på kurssidan efter skrivningens slut.
Där meddelas också när tentan och uppsatsen är rättade.