KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks1, Signaler och system I, 17 september 2009

A1) Finn den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$e^{2x}y' + 3x(1+y^2) = 0$$

som uppfyller $y(0) = 0$.
Du behöver inte avgöra för vilka x lösningen är definierad.

Lösning: Ekvationen är separabel. Division med $e^{2x}(1+y^2)$ (som säkert är $\neq 0$, så vi tappar ingen lösning) ger formen $\frac{y'}{1+y^2} = -3xe^{-2x}$.
Integration $\int \ldots\, dx$ (med partialintegration i HL) ger $\arctan y = \frac{3}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + C$, så $y(x) = \tan(\frac{3}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + C)$. Villkoret att $y(0) = 0$ ger $C = -\frac{3}{4}(+n\pi)$ och
Svar: $\boldsymbol{y(x) = \tan(\frac{3}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} - \frac{3}{4})}$.

A2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

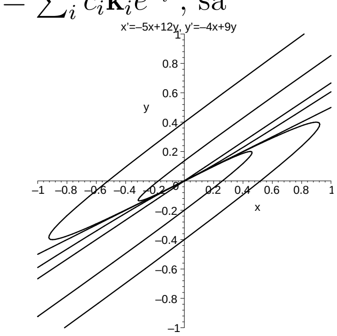
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Rita också ett (ungefärligt men kvalitativt riktigt) **fasporträtt** för systemet. Porträttet skall innehålla alla banor som är räta linjer och minst fyra andra. Ange med pilar på varje bana åt vilket håll den genomlöps då t växer.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 12 \\ -4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(9-\lambda) - (-4)\cdot 12 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 3, 1$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} -8 & 12 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,
för $\lambda_2 = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 12 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i \mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så

Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}}$
$\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**
I figuren t.h. skulle banorna ha pilar ut från origo.



B1) Finn den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$e^{3x}y' + 2x(1+y^2) = 0$$

som uppfyller $y(0) = 0$.
Du behöver inte avgöra för vilka x lösningen är definierad.

Lösning: Ekvationen är separabel. Division med $e^{3x}(1+y^2)$ (som säkert är $\neq 0$, så vi tappar ingen lösning) ger formen $\frac{y'}{1+y^2} = -2xe^{-3x}$.
Integration $\int \ldots\, dx$ (med partialintegration i HL) ger $\arctan y = \frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x} + C$, så $y(x) = \tan(\frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x} + C)$. Villkoret att $y(0) = 0$ ger $C = -\frac{2}{9}(+n\pi)$ och
Svar: $\boldsymbol{y(x) = \tan(\frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x} - \frac{2}{9})}$**.**

B2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Rita också ett (ungefärligt men kvalitativt riktigt) **fasporträtt** för systemet. Porträttet skall innehålla alla banor som är räta linjer och minst fyra andra. Ange med pilar på varje bana åt vilket håll den genomlöps då t växer.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) - 6\cdot(-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, med lösningar $\lambda_{1,2} = -1, -2$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = -1$: $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -2$: $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så

Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) e^{-t} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) e^{-2t}}$
$\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**
I figuren t.h. skulle banorna ha pilar in mot origo.