KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks1, Signaler och system I, 10 november 2009

A1) Finn lösningen till problemet

$$\begin{cases} (4-x^2)y' - xy = e^{3x}\sqrt{4-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Ange också (det maximala) definitionsintervallet för lösningen.

Lösning: För att högerledet skall vara definierat krävs $-2 < x < 2$, så $|4-x^2| = 4-x^2$.
Ekvationen är linjär av första ordningen. På standardform är den $y' - \frac{x}{4-x^2}y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{4-x^2}}$, så en integrerande faktor blir $\mu(x) = e^{\int -\frac{x}{4-x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{4-x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|4-x^2|} = \sqrt{|4-x^2|} = \sqrt{4-x^2}$ och ekvationen kan skrivas $(\sqrt{4-x^2}y)' = e^{3x}$. Det ger $\sqrt{4-x^2}y(x) = \frac{e^{3x}}{3} + C$, dvs den **allmänna lösningen** är $y(x) = \frac{e^{3x}}{3\sqrt{4-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{4-x^2}}$, C en godtycklig konstant. Villkoret $y(0) = 1$ ger $\frac{1}{6} + \frac{C}{2} = 1$, så $C = \frac{5}{3}$ och den är definierad i hela intervallet $]-2, 2[$.

Svar: $\boldsymbol{y(x) = \frac{e^{3x}}{3\sqrt{4-x^2}} + \frac{5}{3\sqrt{4-x^2}}}$**, definierad i hela** $\boldsymbol{]-2,2[}$**.**

A2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

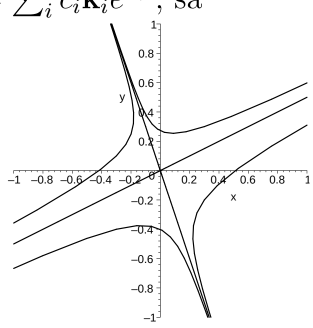
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Rita också ett (ungefärligt men kvalitativt riktigt) **fasporträtt** för systemet. Porträttet skall innehålla alla banor som är räta linjer och minst fyra andra. Ange med pilar på varje bana åt vilket håll den genomlöps då t växer.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 3\cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 10$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 5, -2$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 5$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
för $\lambda_2 = -2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så

Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}}$,
$\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**
I figuren t.h. skulle banorna ha pilar in längs $\pm\mathbf{k}_2$ och ut längs $\pm\mathbf{k}_1$.



B1) Finn lösningen till problemet

$$\begin{cases} (9-x^2)y' - xy = e^{2x}\sqrt{9-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Ange också (det maximala) definitionsintervallet för lösningen.

Lösning: För att högerledet skall vara definierat krävs $-3 < x < 3$, så $|9-x^2| = 9-x^2$.
Ekvationen är linjär av första ordningen. På standardform är den $y' - \frac{x}{9-x^2}y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{9-x^2}}$, så en integrerande faktor blir $\mu(x) = e^{\int -\frac{x}{9-x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{9-x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|9-x^2|} = \sqrt{|9-x^2|} = \sqrt{9-x^2}$ och ekvationen kan skrivas $(\sqrt{9-x^2}y)' = e^{2x}$. Det ger $\sqrt{9-x^2}y(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$, dvs den **allmänna lösningen** är $y(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{9-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{9-x^2}}$, C en godtycklig konstant. Villkoret $y(0) = 1$ ger $\frac{1}{6} + \frac{C}{3} = 1$, så $C = \frac{5}{2}$ och den är definierad i hela intervallet $]-3,3[$.

Svar: $\boldsymbol{y(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{9-x^2}} + \frac{5}{2\sqrt{9-x^2}}}$**, definierad i hela** $\boldsymbol{]-3,3[}$**.**

B2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Rita också ett (ungefärligt men kvalitativt riktigt) **fasporträtt** för systemet. Porträttet skall innehålla alla banor som är räta linjer och minst fyra andra. Ange med pilar på varje bana åt vilket håll den genomlöps då t växer.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda) - 7\cdot 2 = \lambda^2 + 3\lambda - 18$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 3, -6$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -6$: $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -7 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så

Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{3t} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -7 \end{smallmatrix}\right) e^{-6t}}$**,**
$\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**

I figuren t.h. skulle banorna ha pilar in längs $\pm\mathbf{k}_2$ och ut längs $\pm\mathbf{k}_1$.