KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks2, Signaler och system I, 14 oktober 2009

A1) Bestäm funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 4\tau + 13)((t-\tau)^2 + 4)},$$

dvs $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$, där $f(t) = \frac{1}{t^2+4t+13}$ och $g(t) = \frac{1}{t^2+4}$.

Lösning: $f(t) = \frac{1}{t^2+4t+13} = \frac{1}{(t+2)^2+3^2}$, så (enligt fs) dess fouriertransform $F(\omega) = e^{i\omega 2}\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$ och $g(t) = \frac{1}{t^2+2^2}$ så $G(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$.
$h(t)$ är en faltning, $h(t) = (f*g)(t)$, så fouriertransformen $H(\omega) = F(\omega)G(\omega) = e^{i2\omega}\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} = e^{i2\omega}\frac{\pi^2}{6}e^{-5|\omega|} = \frac{5\pi}{6}e^{i2\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$ och (fs igen) $h(t) = \frac{5\pi}{6}\frac{1}{(t+2)^2+25}$.
Svar: Funktionen är $\boldsymbol{h(t) = \frac{5\pi}{6}\frac{1}{(t+2)^2+25}}$.

A2a) Finn laplacetransformen $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ av

$$f(t) = (t+2)\,e^{3t}\,\mathcal{U}(t-4).$$

($\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.)

b) Finn en funktion $g(t)$, $t \geq 0$, som har laplacetransformen

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-3s}}{(s+4)(s+5)}.$$

Lösning: a) Eftersom $\mathcal{L}\{t+6\} = \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s}$ är $\mathcal{L}\{(t+2)\mathcal{U}(t-4)\} = \mathcal{L}\{((t-4)+6)\mathcal{U}(t-4)\} = e^{-4s}(\frac{1}{s^2} + \frac{6}{s})$ och $\mathcal{L}\{e^{3t}\cdot(t+2)\mathcal{U}(t-4)\} = e^{-4(s-3)}(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{6}{s-3})$.
(Alternativt: $\mathcal{L}\{(t+6)\,e^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{6}{s-3}$, så $\mathcal{L}\{(t+2)\,e^{3t}\,\mathcal{U}(t-4)\} = \mathcal{L}\{((t-4)+6)\,e^{3(t-4)+12}\,\mathcal{U}(t-4)\} = e^{12}e^{-4s}(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{6}{s-3})$.)
b) Eftersom $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+4)(s+5)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+5}\} = e^{-4t} - e^{-5t}$ är $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)(s+5)}\} = (e^{-4(t-3)} - e^{-5(t-3)})\mathcal{U}(t-3)$.
Svar: a) $\boldsymbol{F(s) = e^{-4(s-3)}(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{6}{s-3})}$,
b) $\boldsymbol{g(t) = (e^{-4(t-3)} - e^{-5(t-3)})\,\mathcal{U}(t-3)}$.

B1) Bestäm funktionen
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2+6\tau+13)((t-\tau)^2+9)},$$
dvs $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$, där $f(t) = \frac{1}{t^2+6t+13}$ och $g(t) = \frac{1}{t^2+9}$.

Lösning: $f(t) = \frac{1}{t^2+6t+13} = \frac{1}{(t+3)^2+2^2}$, så (enligt fs) dess fouriertransform $F(\omega) = e^{i\omega 3}\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$ och $g(t) = \frac{1}{t^2+3^2}$ så $G(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$.
$h(t)$ är en faltning, $h(t) = (f*g)(t)$, så fouriertransformen $H(\omega) = F(\omega)G(\omega) = e^{i3\omega}\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|} = e^{i3\omega}\frac{\pi^2}{6}e^{-5|\omega|} = \frac{5\pi}{6}e^{i3\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$ och (fs igen) $h(t) = \frac{5\pi}{6}\frac{1}{(t+3)^2+25}$.
Svar: Funktionen är $\boldsymbol{h(t) = \frac{5\pi}{6}\frac{1}{(t+3)^2+25}}$.

B2a) Finn laplacetransformen $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ av
$$f(t) = (t+4)\,e^{3t}\,\mathcal{U}(t-2).$$
($\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.)

b) Finn en funktion $g(t)$, $t \geq 0$, som har laplacetransformen
$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-5s}}{(s+3)(s+4)}.$$

Lösning: a) Eftersom $\mathcal{L}\{t+6\} = \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s}$ är $\mathcal{L}\{(t+4)\,\mathcal{U}(t-2)\} = \mathcal{L}\{((t-2)+6)\,\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-2s}(\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s})$ och $\mathcal{L}\{e^{3t}\cdot(t+4)\,\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-2(s-3)}(\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{6}{s-3})$.
(Alternativt: $\mathcal{L}\{(t+6)\,e^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{6}{s-3}$, så $\mathcal{L}\{(t+4)\,e^{3t}\,\mathcal{U}(t-2)\} = \mathcal{L}\{((t-2)+6)\,e^{3(t-2)+6}\,\mathcal{U}(t-2)\} = e^6 e^{-2s}(\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{6}{s-3})$.)
b) Eftersom $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+3)(s+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+4}\} = e^{-3t}-e^{-4t}$ är $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-5s}}{(s+3)(s+4)}\} = (e^{-3(t-5)} - e^{-4(t-5)})\,\mathcal{U}(t-5)$.
Svar: a) $\boldsymbol{F(s) = e^{-2(s-3)}(\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{6}{s-3})}$,
b) $\boldsymbol{g(t) = (e^{-3(t-5)} - e^{-4(t-5)})\,\mathcal{U}(t-5)}$.
