KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks2, Signaler och system I, 8 december 2009

A1a) Funktionen $f(t)$ har fouriertransformen $F(\omega)(=\widehat{f}(\omega))=\varphi(\omega)$.
Finn en funktion (uttryckt i f) som har fouriertransformen

$$\omega\, e^{i\omega}\, \varphi(\omega+\pi).$$

b) Finn en funktion $g(t)$ sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{25+t^2}.$$

Lösning:

a) Eftersom $f(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \varphi(\omega)$ gäller (formlerna i NO) att $e^{-i\pi t}\, f(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \varphi(\omega+\pi)$ och (fs NO igen) att $e^{-i\pi(t+1)}\, f(t+1) = -e^{-i\pi t}\, f(t+1) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{i\omega}\varphi(\omega+\pi)$.
Derivation (fs NO) ger $\frac{d}{dt}(-e^{-i\pi t}\, f(t+1)) \xmapsto{\mathcal{FT}} i\omega\, e^{i\omega}\varphi(\omega+\pi)$, så
$i\frac{d}{dt}(e^{-i\pi t}\, f(t+1)) = e^{-i\pi t}(if'(t+1)+\pi f(t+1)) \xmapsto{\mathcal{FT}} \omega\, e^{i\omega}\varphi(\omega+\pi)$.
Svar a): Funktionen $e^{-i\pi t}(if'(t+1)+\pi f(t+1))$ uppfyller villkoret.
b) Ekvationen är $(g*g)(t) = \frac{1}{5^2+t^2}$, med $*$ för (fourier)faltning.
Fouriertransformation ger (fs NO, NV) $\widehat{g}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) = \frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$ och vi kan ta $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{5}}e^{-\frac{5}{2}|\omega|}$ som ger $g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\frac{5}{2}}{\pi}\frac{1}{(\frac{5}{2})^2+t^2} = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{1}{5^2+4t^2}$.

Svar b): Ett sådant $g(t)$ är $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{1}{25+4t^2}$.

B1a) Funktionen $g(t)$ har fouriertransformen $G(\omega)(=\widehat{g}(\omega))=\psi(\omega)$.
Finn en funktion (uttryckt i g) som har fouriertransformen

$$\omega\, e^{i\pi\omega}\, \psi(\omega+1).$$

b) Finn en funktion $f(t)$ sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{9+t^2}.$$

Lösning:

a) Eftersom $g(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \psi(\omega)$ gäller (formlerna i NO) att $e^{-it}\, g(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} \psi(\omega+1)$ och (fs NO igen) att $e^{-i(t+\pi)}\, g(t+\pi) = -e^{-it}\, g(t+\pi) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{i\pi\omega}\psi(\omega+1)$.
Derivation (fs NO) ger $\frac{d}{dt}(-e^{-it}\, g(t+\pi)) \xmapsto{\mathcal{FT}} i\omega\, e^{i\pi\omega}\psi(\omega+1)$, så
$i\frac{d}{dt}(e^{-it}\, g(t+\pi)) = e^{-it}(ig'(t+\pi)+g(t+\pi)) \xmapsto{\mathcal{FT}} \omega\, e^{i\pi\omega}\psi(\omega+1)$.
Svar a): Funktionen $e^{-it}(ig'(t+\pi)+g(t+\pi))$ uppfyller villkoret.
b) Ekvationen är $(f*f)(t) = \frac{1}{3^2+t^2}$, med $*$ för (fourier)faltning.
Fouriertransformation ger (fs NO, NV) $\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$ och vi kan ta $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{3}{2}|\omega|}$ som ger $f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{3}{2}}{\pi}\frac{1}{(\frac{3}{2})^2+t^2} = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{3^2+4t^2}$.

Svar b): Ett sådant $g(t)$ är $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{9+4t^2}$.

A2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = \mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases},$$

där $\mathcal{U}(t)$ betecknar Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.
a) (2p) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.
b) (2p) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$ för alla $t > 0$.

Lösning:
a) Laplacetransformation av ekvationen ger (fs SO,SV) $(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) - 6Y(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$, dvs, med de givna begynnelsevärdena, $(s^2 + s - 6)Y(s) = (s-2)(s+3)Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$, så

Svar a): $\boldsymbol{Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s-2)(s+3)}}$**.**

b) Partialbråksuppdelning av $\frac{1}{s(s-2)(s+3)}$ ger (med handpåläggning, identifikation av koefficienter e.dyl.) $Y(s) = e^{-2s}\left(\frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{1}{10}}{s-2} + \frac{\frac{1}{15}}{s+3}\right)$, så (fs SV,SO),

Svar b): $\boldsymbol{y(t) = (-\frac{1}{6} + \frac{1}{10}e^{2(t-2)} + \frac{1}{15}e^{-3(t-2)})\mathcal{U}(t-2)}$**.**

B2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = \mathcal{U}(t-3) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases},$$

där $\mathcal{U}(t)$ betecknar Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.
a) (2p) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.
b) (2p) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$ för alla $t > 0$.

Lösning:
a) Laplacetransformation av ekvationen ger (fs SO,SV) $(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = e^{-3s} \cdot \frac{1}{s}$, dvs, med de givna begynnelsevärdena, $(s^2 + 3s - 4)Y(s) = (s-1)(s+4)Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s}$, så

Svar a): $\boldsymbol{Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+4)}}$**.**

b) Partialbråksuppdelning av $\frac{1}{s(s-1)(s+4)}$ ger (med handpåläggning, identifikation av koefficienter e.dyl.) $Y(s) = e^{-3s}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{5}}{s-1} + \frac{\frac{1}{20}}{s+4}\right)$, så (fs SV,SO),

Svar b): $\boldsymbol{y(t) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^{t-3} + \frac{1}{20}e^{-4(t-3)})\mathcal{U}(t-3)}$**.**